VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
EKONOMICKÁ FAKULTA

KATEDRA FINANCÍ

Ověření vybraných metod oceňování finančních derivátů na úrokové sazby

A Validation Study on Selected Methods of Valuation of Interest Rate Derivatives

Student: Petra Pluháčková

Vedoucí diplomové práce: prof. Dr. Ing. Zmeškal Zdeněk

Ostrava 2011

VŠB - Technická univerzita Ostrava
Ekonomická fakulta
Katedra financí

Zadání diplomové práce

Student:	**Bc. Petra Pluháčková**
Studijní program:	N6202 Hospodářská politika a správa
Studijní obor:	6202T010 Finance
Specializace:	00 Finance
Téma:	Ověření vybraných metod oceňování finančních derivátů na úrokové sazby A validation study on selected methods of valuation of interest rate derivatives

Zásady pro vypracování:

1. Úvod
2. Charakteristika finančních derivátů na úrokové sazby a odhad výnosových křivek
3. Popis metod oceňování finančních derivátů na úrokové sazby
4. Ověření vybraných metod oceňování derivátů na úrokové sazby
5. Závěr

Seznam použité literatury
Seznam zkratek
Prohlášení o využití výsledků diplomové práce
Přílohy

Seznam doporučené odborné literatury:

FABOZZI, F. J. *The Handbook of Fixed Income Securities.* 6th ed. New York: McGraw-Hill, 2001. 1373 s. ISBN 0-07-135805-6.
HULL, J. C. *Options, Futures and Other Derivatives.* 6th ed. New Jersey: Prentice Hall, 2006. 789 s. ISBN 0-13-149908-4.
NEFTCI, S. N. *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives.* 2nd ed. New York: Academic Press, 2000. 527 s. ISBN 0-12-515392-9.

Formální náležitosti a rozsah diplomové práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí diplomové práce: **prof. Dr. Ing. Zdeněk Zmeškal**

Datum zadání: 26.11.2010
Datum odevzdání: 29.04.2011

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ - TECHNICKÁ UNIVERZITA
Ekonomická fakulta
OSTRAVA
1

Ing. Iveta Ratmanová, Ph.D.
vedoucí katedry

prof. Dr. Ing. Dana Dluhošová
děkanka fakulty

„Místopřísežně prohlašuji, že jsem celou práci, včetně všech příloh, vypracovala samostatně“.

…………………………………… ………………………..

datum odevzdání diplomové práce podpis studenta

Obsah

1. Úvod

Finanční deriváty vznikaly postupně od 70. let, ale v 80. letech nabraly na intenzitě. Jedná se o finanční instrumenty, jejichž cena je závislá na velikosti úrokové míry. Objem těchto obchodů převyšuje veškeré ostatní typy. Mezi nejznámější patří například opce, futures na bondy, úrokové swapy, caps, floors.

Zvláštní skupinu finančních derivátů tvoří deriváty, kde jsou podkladovým aktivem úrokové sazby. Cílem diplomové práce je ověřit metody oceňování finančních derivátů na úrokové sazby s aplikací na český kapitálový trh.

Ve druhé kapitole bude obecně popsána charakteristika dluhopisů, dělení dluhopisů a charakteristika jednotlivých finančních derivátů. Další část druhé kapitoly bude věnována výnosovým křivkám, jejich teorii a konstrukci v praxi.

Ve třetí kapitole budou popsány jednotlivé metody použitelné k oceňování derivátů na úrokové sazby. Jedná se o metody analytické a numerické. Z analytických metod bude popsán Vašíčkův model, CIR model, Ho-Lee model a Hull-White model. Z numerických to budou stromové diagramy úrokových sazeb, tj. binomický model na bázi Ho-Lee modelu a trinomický model na bázi Hull-White modelu.

Ve čtvrté kapitole bude provedeno ověření metod v podmínkách českého kapitálového trhu. V první části bude proveden odhad spotové a forwardové výnosové křivky ze státních dluhopisů. Dále bude propočteno ocenění úrokových derivátů. Výpočty budou porovnány a ověřeny pomocí vybraných metod oceňování pro dané podmínky.

2. Charakteristika finančních derivátů na úrokové sazby a odhad výnosových křivek

V této kapitole se bude vycházet z již existující literatury [1], [2], [3], [6], [7], [10], [11], [12]. Před tím, než přikročíme k definování finančních derivátů na úrokové sazby, je vhodné věnovat krátkou pozornost charakteristice dluhopisů a jejich dělení.

2.1 Charakteristika dluhopisů (obligací)

Dluhopis je dluhový cenný papír, který vyjadřuje závazek emitenta vůči věřiteli. S tímto cenným papírem je spojeno právo majitele dluhopisu požadovat splnění tohoto závazku. V České republice jsou dluhopisy vydávány na základě zákona o dluhopisech. Jejich vydávání povoluje Ministerstvo financí ČR po souhlasném vyjádření České národní banky. Emitenty mohou být pouze právnické a fyzické osoby, které mají podnikatelské oprávnění.

Emitent si emisí dluhopisu opatřuje finanční zdroje především na svoje investiční záměry či ke krytí schodku hospodaření a investorům slouží dluhopis k uložení kapitálu. Mezi hlavní náležitosti dluhopisu patří označení emitenta, nominální hodnota dluhopisu, název a číselné označení dluhopisu, doba splatnosti, frekvence, způsob a místo vyplácení výnosu, datum vydání dluhopisu a další.[1]

Dluhopisy je možné dělit z několika hledisek. K nejpoužívanějším patří následující rozdělení.[2]

Podle osoby dlužníka:

- průmyslové dluhopisy – vydávají je soukromé společnosti a slouží k financování investičních a dlouhodobějších potřeb oběžného majetku;
- bankovní dluhopisy – vydávají je peněžními ústavy, které chtějí získat dlouhodobé peněžní prostředky k poskytování úvěrů;
- státní a veřejné dluhopisy – vydává je vláda, města, obce a další instituce k opatření zdrojů na krytí deficitu, na rozvoj, opravu infrastruktury a další;
- eurodluhopisy – jsou vydávány v cizí měně na daném území.

[1] Kolektiv autorů: Bankovnictví. 5. přepracované vydání. Bankovní institut, a.s., Praha, 2005. str. 195-196
[2] Kolektiv autorů: Bankovnictví. 5. přepracované vydání. Bankovní institut, a.s., Praha, 2005. str. 197

Podle stanovení výnosu:

- pevně úročené dluhopisy – majiteli je vyplácen úrok vyjádřený stanoveným procentem z nominální hodnoty dluhopisu ve stanovených termínech. Úrok je stejný po celou dobu platnosti dluhopisu;
- variabilní úročené dluhopisy – úrok se skládá z proměnlivé a fixní části;
- neúročené (diskontované) dluhopisy – emitent u nich nevyplácí průběžně výnos.

Ostatní členění:

- prioritní dluhopisy – dávají předností právo na upisování nově vydaných akcií;
- vyměnitelné dluhopisy – dávají právo na výměnu za akcii společnosti;
- zaměstnanecké dluhopisy – výhradně pro pracovníky emitenta.

2.1.1 Stanovení ceny dluhopisu

Cenou kupónového dluhopisu rozumíme cenu, za kterou je dluhopis obchodován na kapitálovém trhu. Je vypočítán jako cena investice, u níž lze očekávat budoucí příjmy, tj. jako součet všech budoucích příjmů (budoucích kupónových plateb a nominální hodnoty) diskontovaných k současnému datu. Výplata kupónů bývá zpravidla jednou ročně. Matematicky lze cenu dluhopisu *PV* na bázi současné hodnoty zaznamenat následovně:[3]

$$PV = \frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{C}{(1+r)^{n-1}} + \frac{C+NH}{(1+r)^n}, \tag{2.1}$$

kde C je kupónová platba – sjednaný úrok vyplácený v pravidelných intervalech, NH je nominální hodnota – částka vytištěná na cenném papíru, r je výnos do splatnosti a n je doba splatnosti v letech.

Bezkupónový dluhopis se vyznačuje tím, že věřiteli nejsou po dobu platnosti vypláceny žádné kupónové platby. Je prodáván s diskontem, tj. za cenu nižší než je jeho nominální hodnota a v den splatnosti za něj věřitel obdrží právě nominální hodnotu. Tedy cena je vypočítána jako diskontovaná nominální hodnota, kterou lze zapsat následovně:[4]

$$PV = \frac{NH}{(1+r)^n}. \tag{2.2}$$

[3] Bohanesová, E., Finanční matematika I., 1. vydání, PřF Univerzita Palackého v Olomouci, 2006. str. 87

[4] Bohanesová, E., Finanční matematika I., 1. vydání, PřF Univerzita Palackého v Olomouci, 2006. str. 92

Bezkupónový dluhopis lze považovat za speciální případ kupónového dluhopisu s tím, že hodnota kupónové platby je rovna nule.

Dluhopis s variabilním kupónem váže kupónovou sazbu například na vývoj úrokové sazby. Kupóny jsou vypláceny v ročních nebo pololetních intervalech. V den splatnosti dluhopisu je emitentovi zároveň s výplatou kupónu vyplacena i nominální hodnota. Obecně je cena dluhopisu s variabilním kupónem určena takto:

$$PV_t = NH \cdot \left(1 + r_{0,1}\right) \cdot \left(1 + r_{t,1}\right)^{-(1-t)}, \tag{2.3}$$

a v době emise

$$PV_0 = NH. \tag{2.4}$$

2.2 Charakteristika finančních derivátů

Finanční deriváty jsou instrumenty k nákupu či prodeji určitého aktiva v budoucnosti za podmínek sjednaných v přítomnosti. Jejich cena (tržní hodnota) je odvozena od ceny podkladového aktiva, kterým jsou cenné papíry, komodity, devizy, úrokové sazby či akciové indexy. Finanční deriváty jsou uzavírány na základě smlouvy mezi dvěma smluvními stranami.

Finanční deriváty dělíme na termínové obchody (forward markets), při kterých se sjednávají budoucí transakce s předmětnými aktivy, a obchody s kontrakty o budoucích obchodech s podkladovými aktivy (futures markets).

Mezi termínové obchody patří:[5]

- finanční termínované transakce (futures),
- opce,
- forwardy a
- swapy.

Při kontraktu *futures* má kupující povinnost k budoucímu datu převzít a prodávající k budoucímu datu dodat dohodnuté množství finančního aktiva či komodity na organizované burze za dohodnutou cenu.

[5] Kolektiv autorů: Bankovnictví. 5. přepracované vydání. Bankovní institut, a.s., Praha, 2005. str. 206 - 208

Opce je dohoda mezi zúčastněnými stranami, která dává kupujícímu právo prodat nebo koupit k určitému datu či před tímto datem určité množství finančního aktiva za předem dohodnutou cenu. Prodávající je zavázán koupit nebo prodat dané finanční aktivum za stanovených podmínek. Kupující za své právo platí prodávajícímu opční prémii.

Opce dělíme podle práva kupujícího na:

- call opce – držitel opce (kupující) má právo koupit od prodávajícího dohodnuté množství finančního aktiva v předem stanovené ceně;
- put opce – držitel opce má právo prodat prodávajícímu dohodnuté množství finančního aktiva v předem stanovené ceně;

Z hlediska času využití se rozlišují:

- opce evropské – věcné plnění může nastat pouze v den ukončení práva obchodovat;
- opce americké – věcné plnění může nastat kdykoliv před dnem ukončení práva obchodovat,
- bermudské opce – využití v určitých stanovených momentech nebo intervalech,
- zobecněním jsou swing opce – využití v řadě momentů nebo intervalů.

Podle počtu podkladových rizikových aktiv se rozlišují:

- jedno-faktorové opce,
- dvou-faktorové opce – např. spread opce,
- více-faktorové opce – výplata je závislá na portfoliu aktiv.

Forward operace spočívá v tom, že dohoda o nákupu nebo prodeji kontraktu (cenných papírů, zahraniční měny, určité komodity) se provádí v přítomné době, avšak plnění nastává v budoucnu v předem dohodnutém termínu.

Swapy jsou dohody mezi dvěma zúčastněnými stranami o výměně budoucích plateb z podkladového aktiva. Používají se k řízení rizika, pro účelové financování aktiv, spekulaci či ke snížení transakčních nákladů. Dle typu podkladového nástroje rozeznáváme swapy akciové, úrokové, měnové a komoditní.

2.3 Úrokové deriváty

Úrokový derivát je finanční nástroj, který se skládá pouze ze dvou či více podkladových úrokových nástrojů, které jsou pouze v jedné měně a jehož reálná hodnota není ovlivněna rizikovou úrokovou mírou. Jeho výplaty závisejí na úrokových sazbách a objem obchodů je větší než u ostatních typů. Základní rozdíl oproti derivátům na akcie, indexy, měny a ceny spočívá v tom, že náhodná funkce není ovlivněna pouze náhodným vývojem jedné ceny, ale výnosovou křivkou a jejich vývojem v čase. Mezi nejznámější patří opce, obligace, futures na obligace, eurodolarové furures, caps, úrokové swapy, FRA. Základem ohodnocování je znalost dynamiky úrokové míry, jejíž pohyb má náhodný charakter.

2.3.1 Úrokové forwardy

Úrokový forward (interest rate forward) patří do skupiny finančních derivátů označované jako termínované kontrakty, ve kterém se zavazují obě smluvní strany k výměně pevné částky hotovosti v dané měně za dosud neznámou částku hotovosti, dluhový cenný papír či pohledávku, úvěr nebo vklad ve stejné měně na dohodnuté období v budoucnosti za předem stanovenou úrokovou sazbu. Dle způsobu vypořádání může mít úrokový forward v praxi podobu jednoho ze tří druhů kontraktů: [6]

- dohody o forwardové úrokové míře (FRA),
- forwardového úrokového vkladu, půjčky hotovosti nebo úvěru a
- forwardového nákupu nebo prodeje dluhového cenného papíru či pohledávky.

Dohoda o forwardové úrokové míře - *FRA (Forward Rate Agreement).*
Pomocí FRA je možné zajistit už dnes úrokovou sazbu na variabilně úročený vklad či závazek začínající až v budoucnosti. Smluvní strany se dohodnou na úrokové sazbě (FRA sazba). Tato sazba je poté porovnávána s úrokovou sazbou základního obchodu, tj. s referenční úrokovou sazbou (např. PRIBOR[7], LIBOR). Pokud je referenční sazba vyšší než FRA sazba, obdrží kupující FRA od prodávajícího vyrovnávací platbu ve výši rozdílu dvou úroků za dané období. Taktéž platí opačná situace, pokud je referenční sazba nižší, kupující FRA hradí vyrovnávací platbu.

[6] Jílek J., Finanční a komoditní deriváty v praxi. 2.vydání. Grada Publishing, Praha, 2010. s. 87
[7] PRIBOR (Prague interbank offered rate) je úroková sazba na likviditu v různých měnách, za kterou si banky navzájem poskytují úvěry na českém mezibankovním trhu.

Forwardový úrokový vklad, půjčka hotovosti nebo úvěr (forward-forward agreement).
Jde o úrokový kontrakt na výměnu pevného objemu v jedné měně za vklad, půjčku hotovosti či úvěr ve stejné měně s hrubým vypořádáním, které odlišuje tento kontrakt od FRA. Jde v podstatě o kontrakt o přijetí či poskytnutí termínovaného vkladu či úvěru na určité období v budoucnosti za předem stanovenou úrokovou sazbu. Jedná se o výměnu pevného objemu hotovosti za dosud neznámý objem hotovosti. Tento instrument nabývá podoby kontraktu o přijetí či poskytnutí vkladu, půjčky hotovosti či úvěru na dané období začínající určitým dnem v budoucnosti, a to za úrokovou míru dohodnutou při sjednání kontraktu.

Forwardový nákup nebo prodej dluhového cenného papíru či pohledávky (forward purchase or sale of debt security).
Jde o úrokový forward na výměnu pevného objemu hotovosti v jedné měně za dluhový cenný papír emitovaný ve stejné měně s hrubým vypořádáním finanční sumy a cenného papíru či pohledávky. Taktéž i v tomto případě se jedná o výměnu pevného objemu hotovosti za dosud neznámý objem hotovosti. A tento kontrakt se odlišuje od dohody FRA hrubým vypořádáním. Tento instrument nabývá podoby kontraktu o přijetí či poskytnutí dluhového CP k určitému datu v budoucnu, a to za cenu dohodnutou při sjednání kontraktu.

2.3.2 Úrokové futures

Úrokový futures (interest rate futures) je kontrakt na výměnu pevné částky hotovosti v jedné měně za neznámou částku hotovosti či dluhový cenný papír ve stejné měně. Neznámá částka hotovosti závisí na budoucí spotové bezrizikové úrokové míře. Úrokový futures se podle způsobu vypořádání dělí na dva druhy: [8]

- futures na úrokovou míru a
- futures na dluhové cenné papíry.

Futures na úrokovou míru (interes rate futures) je kontrakt na výměnu pevné částky hotovosti v jedné měně za neznámou částku hotovosti ve stejné měně odvozenou od referenční úrokové sazby (např. PRIBOR). Navíc se jedná o čisté vypořádání hotovosti, které odlišuje tento instrument od futures na dluhové cenné papíry.

[8] Jílek J., Finanční a komoditní deriváty v praxi. 2.vydání. Grada Publishing, Praha, 2010. s. 242

Futures na dluhové cenné papíry (debt securities futures) je kontrakt na výměnu pevné částky hotovosti v jedné měně za dluhový cenný papír ve stejné měně s hrubým vypořádáním hotovosti a cenného papíru, které odlišuje tento instrument od futures na úrokovou míru.

Futures na úrokovou míru jsou v podstatě shodné s dohodou o forwardové úrokové míře. Rozdíl spočívá v tom, že u futures dochází k průběžnému vypořádání od sjednání kontraktu až do jeho splatnosti.

2.3.3 Úrokový swap

Úrokový swap (interest rate swap) je dohoda mezi dvěma smluvními stranami na výměnu pevných částek hotovosti v jedné měně za neznámé částky hotovosti ve stejné měně. Neznámá částka hotovosti závisí na budoucí spotové bezrizikové úrokové míře. V těchto kontraktech však běžně nedochází k přesunu jmenovité hodnoty. Smluvní strany si swapem vyměňují jen úroky vázané na aktiva či pasiva. Jestliže navíc úrokové platby mají být provedeny ve stejný moment, potom se může vyměnit pouze vyrovnávací platba daná rozdílem úrokových plateb. Úrokový swap slouží k zajištění proti úrokovému riziku z původního obchodu (např. dlouhodobého úvěru) a dělí se následovně: [9]

- klasický úrokový swap (classic interest rate swap),
- bazický úrokový swap (basic interest rate swap),
- swap a konstantní splatností (constant maturity swap),
- úbytkový úrokový swap (amortising interest rate swap) a
- inverzní floaterový swap (inverse floater swap).

2.3.4 Úrokové opce

Úroková opce (interest rate option) představuje dohodu mezi dvěma stranami o výměně pevné částky hotovosti v jedné měně za dosud neznámou částku hotovosti, vklad, půjčku hotovosti, dluhový cenný papír nebo úvěr ve stejné měně. Úroková opce může nabývat následujících podob:[10]

- opce na koupi či prodej dohody o forwardové úrokové míře,
- opce na přijetí či poskytnutí termínovaného vkladu, úvěru či půjčky hotovosti a
- opce na koupi či prodej dluhového cenného papíru či pohledávky.

[9] Jílek J., Finanční a komoditní deriváty v praxi. 2.vydání. Grada Publishing, Praha, 2010. s. 325
[10] Jílek J., Finanční a komoditní deriváty v praxi. 2.vydání. Grada Publishing, Praha, 2010. s. 438

Opce na koupi či prodej dohody o forwardové úrokové míře je dohoda na výměnu pevné částky hotovosti v jedné měně za neznámou částku hotovosti odvozenou od určité referenční úrokové sazby (např. LIBOR) ve stejné měně s čistým vypořádáním hotovosti.

Opce na přijetí či poskytnutí termínovaného vkladu, úvěru či půjčky hotovosti je dohoda na výměnu pevné částky hotovosti v jedné měně za vklad ve stejné měně a to s hrubým vypořádáním hotovosti.

Opce na koupi či prodej dluhového cenného papíru či pohledávky je dohoda na výměnu pevné částky hotovosti v jedné měně za dluhový cenný papír ve stejné měně s hrubým vypořádáním hotovosti a cenného papíru

Mezi opce na úrokové sazby dále patří: cap, floor a collar. [11]

Cap (cap, ceiling) je řada opcí na koupi dohody o forwardové úrokové míře, která spočívá v tom, že pokud překročí dohodnutá referenční úroková sazba smluvně stanovenou pevnou úrokovou cap sazbu, poté uhradí prodávající tohoto kontraktu jeho držiteli rozdíl plynoucí z těchto dvou sazeb, tj vyrovnávací platbu. Kupující za tuto možnost platí opční prémii, která je stanovena při sjednání kontraktu.

Floor (floor) je řada opcí na prodej dohody o forwardové úrokové míře (tedy floor je protikladem cap a chrání před poklesem úrokových sazeb v budoucnosti). Jde o ujednání, kde kupující periodicky obdrží v budoucnosti vyrovnávací platby úměrné rozdílu mezi pevně dohodnutou floor sazbou a referenční úrokovou sazbou. Za tuto možnost platí opční prémii, stanovenou při sjednání kontraktu.

Collar (collar,cylinder) je kombinace dvou předchozích, tedy současná koupě capu a prodej flooru. Prémie collaru je určena rozdílem prémií flooru a capu a závisí na realizačních úrokových sazbách capu a flooru. Collar s nulovými náklady (zero cost collar) nastává tehdy, pokud se prémie flooru rovná prémii capu. Tento kontrakt zajišťuje, že výsledné úroky odvozené od proměnlivé úrokové míry se budou pohybovat v daném pásmu, tj. mezi minimální a maximální realizační úrokovou mírou.

[11] Jílek J., Finanční a komoditní deriváty v praxi. 2.vydání. Grada Publishing, Praha, 2010. s. 456- 462

2.4 Výnosové křivky (yield curve)

Výnosová křivka je základem pro stanovení hodnoty finančních instrumentů. Jde o základní parametr, pomocí něhož jsou ovlivňovány ceny. Jelikož cena instrumentů není ovlivňována jednou hodnotou, ale řadou hodnot na výnosové křivce. Výnosová křivka je závislost výnosů do splatnosti dluhových nástrojů na době do splatnosti. Může mít různé tvary, z nichž je nejčastější rostoucí, tj. se zvyšující se splatností se zvyšuje výnosnost do splatnosti. Mezi další tvary patří klesající (inverzní), tj. se zvyšující se splatností se snižuje výnosnost do splatnosti, plochý (flat) a vypouklý.[12]

Výnos do splatnosti je určen jako vnitřní výnosové procento *(y)* z finančních toků *(CF)* a tržní ceny *(TC)* instrumentu s pevnými příjmy, *T* dobou do splatnosti,

$$TC = \sum_{t}^{T} \frac{CF_t}{(1+y)^t}. \tag{2.5}$$

Dle konstrukce výnosu je možné rozlišovat spotovou a forwardovou výnosovou křivku. *Spotová výnosová křivka* (spot yield curve) je momentální závislost výnosů do splatnosti na době do splatnosti. *Forwardová výnosová křivka* (forward yield curve) představuje odhad výnosové křivky k určitému okamžiku v budoucnosti.

Výnos lze obecně označit jako $_{a}y_{bc}$, kde *a* znamená moment rozhodování, tj. moment, ke kterému je určován výnos, *b* označuje začátek intervalu, z kterého je výnos do splatnosti počítán a *c* konec intervalu, z kterého je výnos do splatnosti počítán.

Spotový výnos *r* je výnos, který je stanoven v intervalu, který začíná momentem rozhodnutí,

$$_{0}y_{0,t}=r_t. \tag{2.6}$$

Forwardový výnos *f* je výnos, který je určen vždy z nějakého intervalu v budoucnosti,

$$_{0}y_{t1,t}=f_t. \tag{2.7}$$

Short výnos *s* je v podstatě forwardový výnos pro jedno období,

$$_{0}y_{t1,t}=f_t=s_t,\ \text{kde } t-t_1=1. \tag{2.8}$$

[12] Zmeškal, Z. a kolektiv: Finanční modely. Ekopress, s.r.o, 2004. s. 48

Za předpokladu výplaty kupónu jedenkrát ročně je spotový výnos určen podle:

$$TC = \sum_t \frac{CF_t}{(1+y)^t}, \tag{2.9}$$

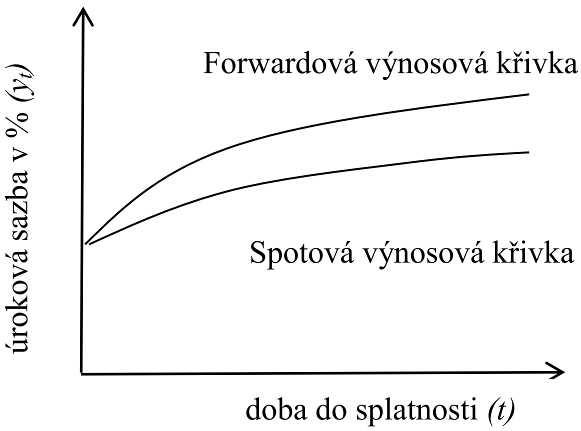
a za předpokladu spojitého úročení

$$TC = \sum_t \frac{CF_t}{e^{r_t t}}. \tag{2.10}$$

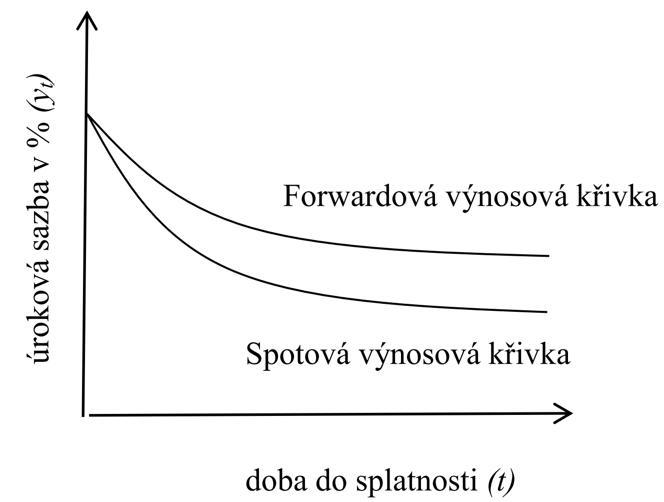
2.4.1 Vztah mezi forwardovými a spotovými sazbami

Forwardové sazby jsou derivací spotové sazby. Z toho tedy plyne, že pokud je spotová křivka rostoucí, pak jsou forwardové úrokové sazby pro každou splatnost vyšší než spotové úrokové sazby. Tato situace platí i naopak, tj. pokud je spotová křivka klesající, pak jsou forwardové úrokové sazby pro každou splatnost nižší než spotové úrokové sazby. Uvedené situace nám znázorňují následující grafy.

Graf 2.1



Graf 2.2



2.4.2 Konstrukce spotových a forwardových výnosových křivek

Ke konstrukci výnosových křivek se nejčastěji využívá řada obligací s nulovým kupónem (zero-coupon bond). Pokud však není dostatek těchto obligací, je možné využít obligace s kupónem.

Výnosovou křivku *z obligací s nulovým kupónem* je možné sestrojit dle následujícího postupu.

Prvním krokem je vytvoření finančních toků obligací dle doby do splatnosti. Dále pomocí funkce MÍRA.VÝNOSNOSTI(;) propočítáme spotové sazby za pomoci následujícího vzorce:

$$TC = \frac{CF_t}{(1+r_t)^t}, \tag{2.11}$$

nebo

$$r_t = \left(\frac{TC}{CF_t}\right)^t - 1, \tag{2.12}$$

kde r_t je spotový výnos do doby splatnosti, *CF* jsou peněžní toky plynoucí z dané obligace, a *TC* je tržní cena bezkupónového dluhopisu.

Vycházíme z předpokladu, že $r_1 = f_1$, tedy známe první hodnotu forwardové sazby, a další hodnoty těchto sazeb propočítáme dle následující rovnice:

$$f_t = \frac{(1+r_t)^t}{(1+r_{t-dt})^{t-dt}} - 1, \tag{2.13}$$

kde f_t je forwardový výnos a *dt* je časový interval pro forwardovou sazbu.

V případě předpokladu *dt* =1,

$$f_t = \frac{(1+r_t)^t}{(1+r_{t-dt})^{t-1}} - 1. \tag{2.14}$$

Po výše uvedeném propočtu je možné přejít ke grafickému znázornění spotových a forwardových výnosových křivek.

Výnosovou křivku *z cen kupónových obligací* lze sestrojit dle následujícího postupu, bootstrap.

Označíme-li y výnos do doby splatnosti, c_T velikost kupónové platby a NH jako nominální hodnotu, pak se tržní cena dluhopisu se splatností jeden rok určí takto:

$$TC_1 = \frac{c_1 + NH}{(1+y_1)^1}. \tag{2.15}$$

Obdobným způsobem se určí tržní cena dluhopisu se splatností dva roky, tj.:

$$TC_2 = \frac{c_1}{(1+y_1)^1} + \frac{c_2 + NH}{(1+y_2)^2}. \tag{2.16}$$

Po zobecnění lze rovnici zapsat v následujícím tvaru:

$$TC_T = \sum_{t=1}^{T-1} \frac{c_t}{(1+y_t)^t} + \frac{c_T + NH}{(1+y_T)^T}. \tag{2.17}$$

Obecně se při určení ceny kupónového dluhopisu se splatností v roce T vychází z (2.15)

$$TC_T = A_{t-1} + \frac{(c_T + NH)}{(1+y_T)^T}, \tag{2.18}$$

kde A_{t-1} je současná hodnota kupónových plateb až po T-1, tj.:

$$A_{t-1} = \sum_{t=1}^{T-1} \frac{c_t}{(1+y_t)^t}. \tag{2.19}$$

Výnos do splatnosti y je možné odvodit z rovnice (2.16), tj.:

$$y_T = \left[\frac{c_T + NH}{TC_T - A_{t-1}}\right]^{\frac{1}{T}} - 1. \tag{2.20}$$

Pomocí uvedených vzorců se vytvoří matice finančních toků z kupónových dluhopisů dle doby splatnosti a výchozí vektor spotových sazeb y_T, pomocí něhož je určena matice diskontovaných toků. Součet všech diskontovaných toků snížených o finanční tok v době splatnosti A_{t-1} je určen pomocí rovnice (2.19) a následně se dopočítá y_T podle vzorce (2.20). Poté je možné sestrojit spotovou výnosovou křivku.

Forwardová výnosová křivka je poté odvozena ze spotové výnosové křivky za předpokladu nemožnosti arbitráže, zanedbání transakčních nákladů a stejné výše zápůjční a výpůjční sazby. V případě jednoročního úročení využijeme vzorec:

$$(1 + r_t)^{\boldsymbol{t}} = (1 + r_{t-dt})^{\boldsymbol{t-dt}} \cdot (1 + f_t)^{\boldsymbol{dt}}, \tag{2.21}$$

kde r_t je spotový výnos, f_t je forwardový výnos a dt je časový interval pro forwardovou sazbu.

Výše uvedený vzorec lze poté zapsat ve tvaru:

$$f_t = \left[\frac{(1+r_t)^{\boldsymbol{t}}}{(1+r_{t-dt})^{\boldsymbol{t-dt}}}\right]^{\frac{1}{dt}} - 1, \tag{2.22}$$

a v případě předpokladu dt =1,

$$f_t = \frac{(1+r_t)^{\boldsymbol{t}}}{(1+r_{t-dt})^{\boldsymbol{t-1}}} - 1. \tag{2.23}$$

V případě spojitého úročení pak:

$$e^{r_t \cdot t} = e^{r_{t-dt} \cdot (t-dt)} \cdot e^{f_t \cdot dt}, \tag{2.24}$$

tedy

$$f_t = \frac{r_t \cdot t - r_{t-dt} \cdot (t-dt)}{dt}. \tag{2.25}$$

2.4.3 Teorie výnosových křivek

Tvar výnosových křivek lze vysvětlit třemi základními teoriemi, tj.: [13]

- teorie očekávání,
- teorie preference likvidity,
- teorie segmentovaných trhů.

Teorie očekávání (teorie implicitních sazeb) vychází z předpokladu, že spotové křivky jsou určeny z očekávání budoucích sazeb, tj. implicitními forwardovými sazbami. Tyto sazby je možné považovat za střední hodnoty rozdělení pravděpodobnosti forwardových sazeb. Předpokladem této teorie je, že investoři mají zájem dosáhnout co nejvyššího výnosu bez ohledu na preferenci specifické doby splatnosti.

[13] Zmeškal, Z. a kolektiv: Finanční modely. Ekopress, s.r.o, 2004. s. 49

Teorie preference likvidity je historicky nejmladší teorií. Vychází z předpokladu, že investoři preferují likviditu, tj. krátkodobé cenné papíry před dlouhodobými, a proto vyžadují u delších úrokových sazeb prémii za menší likviditu. To je tedy důvod, proč jsou úrokové sazby s delší dobou splatnosti vyšší.

Teorie segmentovaných trhů vysvětluje, že existují různé skupiny trhů určené dobou splatnosti a kredibilitou cenných papírů a že v těchto segmentech jsou výnosy určeny na základě nabídky a poptávky. Tedy krátkodobá úroková sazba je určena na základě nabídky a poptávky na krátkodobém trhu finančních instrumentů, střednědobá úroková sazba je určena na základě nabídky a poptávky na střednědobém trhu finančních instrumentů a dlouhodobá úroková sazba je určena na základě nabídky a poptávky na dlouhodobém trhu finančních instrumentů.

3. Popis metod oceňování finančních derivátů na úrokové sazby

V této kapitole se bude vycházet z již existující literatury [1], [4], [5], [8], [9], [11].

Oceňování úrokových derivátů je obtížnější než v případě ostatních derivátů a to především z níže uvedených důvodů:

- chování individuální úrokové míry je mnohem složitější ve srovnání s kurzem akcií nebo směnným kurzem,
- pro oceňování mnoha úrokových derivátů je často nutné vytvořit model, který popisuje pravděpodobnostní chování úrokových sazeb na celé výnosové křivce,
- volatility různých bodů na výnosové křivce se liší,
- úrokové sazby jsou používány jak k diskontování, tak i pro stanovení výnosu.

Při oceňování finančních derivátů na úrokové sazby je možné vycházet z následujících přístupů:

- první přístup oceňování finančních derivátů vychází z předpokladu, že podkladové aktivum má lognormální rozdělení. Z tohoto předpokladu vychází tzv. Blackův model.
- druhý přístup vychází z předpokladu, že podkladové aktivum nemá lognormální rozdělení. V tomto případě mluvíme o tzv. modelech úrokových sazeb.

3.1 Modely úrokových sazeb

Podle počtu rizikových faktorů je možné modely rozdělit na:

- jednofaktorové modely a
- vícefaktorové modely.

Jednofaktorové modely mají jen jeden zdroj nejistoty, což vede k jejich nevýhodě, která spočívá v nižší flexibilitě. Jediný faktor, který určuje hodnotu bondu, je okamžitá úroková míra $r(t)$. Do těchto modelů lze mimo jiné zařadit níže uvedené modely, tj.:

- Vašíčkův model,
- Cox-Ingersol-Rossův model (CIR),
- Ho-Lee model,
- Hull – Whiteův.

Vícefaktorové modely mají na rozdíl od jednofaktorových vyšší flexibilitu, ale jsou obtížnější na zpracování. Tyto modely berou v úvahu více různých vlivů (faktorů). Do těchto modelů je možné zařadit například Holtův model. Dále Brennan a Schwartz vyvinuly model, ve kterém se vývoj krátkodobé sazby navrací k dlouhodobé sazbě, případně Longstaff a Schwartz navrhli model, který počítá se stochastickým chováním volatility.

Dále je možné rozdělit modely úrokových sazeb následovně:

- rovnovážné modely a
- bezarbitrážní modely.

Nevýhodou rovnovážných modelů je to, že nemusí odpovídat skutečným úrokovým sazbám. Uvážlivou volbou parametrů mohou být nastaveny tak, aby odpovídaly většině případů, ke kterým dochází běžně v praxi. Ale i tak může docházet k závažným odchylkám. Proto jsou pro mnoho obchodníků neuspokojivé. Bezdůvodně argumentují, že mohou mít velmi malou důvěru v ceně dluhopisu, když model nemá správnou cenu podkladového aktiva. 1% odchylky podkladového dluhopisu může vést až k 25% odchylce v ceně opce.

Bezarbitrážní modely jsou navrženy tak, aby byly přesně v souladu se současnou strukturou úrokových sazeb.[14]

3.1.1 Vašíčkův model

Vašíčkův model patří mezi jeden z prvních použitých modelů. Vychází z předpokladu, že rizikově neutrální proces pro *r* je následující:[15]

$$dr = a \cdot (b - r) \cdot dt + \sigma \cdot dz, \tag{3.1}$$

kde *a* je parametr rychlosti přibližování k dlouhodobé rovnováze, *b* je dlouhodobě očekávaná úroková míra, σ je konstanta a *dt* je interval, na který je charakterizovaná diferenciální rovnice.

Model má vlastnost *mean reversion*, tzn., že pokud je úroková míra menší než *b*, pak je tlačena nahoru. Naopak pokud je úroková míra větší než *b*, pak je tlačena dolů.

[14] Hull, J.C.: Options, Futures and Other Derivatives. 6th ed. New Jersey: Prentice - Hall, 2006. s. 654
[15] Hull, J.C.: Options, Futures and Other Derivatives. 6th ed. New Jersey: Prentice - Hall, 2006. s. 651-652

Předpokladem je normálně rozložená stochastická funkce σ *dz.* Nevýhoda tohoto modelu spočívá v tom, že může dosahovat záporných úrokových sazeb, ale tuto situaci poté řeší následující model, tj. Cox-Ingersoll-Rossův model.

Stanovení parametrů Vašíčkova modelu regresní metodou nejmenších čtverců (MNČ)

Obecný odhadovaný model úrokových sazeb metodou nejmenších čtverců je:[16]

$$\Delta r = \Delta\tilde{r} + \varepsilon, \tag{3.2}$$

kde Δr je náhodný přírůstek úroků, $\Delta\tilde{r}$ je odhadnutý trend modelu a ε je reziduální odchylka.

Odhadovaný diskrétní mean-reversion Vašíčkův model je tedy:

$$\Delta r = \Delta\tilde{r} + \varepsilon = a \cdot (b - r_{t-1}) \cdot \Delta t + \tilde{\sigma} \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot \tilde{z}, \tag{3.3}$$

kde *a, b* jsou odhadované parametry, $\tilde{\sigma}$ je směrodatná odchylka, Δt je interval a z je náhodná veličina $z \in N(0; 1)$.

Tento tvar je však potřeba transformovat na tvar lineární, tj.:

$$\Delta r = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} \cdot r_{t-1} + \varepsilon, \tag{3.4}$$

kde,

$$\tilde{\alpha} = a \cdot b \cdot \Delta t, \tag{3.5}$$

$$\tilde{\beta} = -a \cdot \Delta t. \tag{3.6}$$

Parametry určíme pomocí regresní metody nejmenších čtverců tak, že budeme minimalizovat součet čtverců reziduálních odchylek, tj.

$$min \sum_t \varepsilon_t^2, \tag{3.7}$$

kde,

$$\varepsilon_t = \Delta r - \Delta\tilde{r} = \Delta r - \left(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} \cdot r_{t-1}\right). \tag{3.8}$$

[16] Zmeškal, Z. a kolektiv: Finanční modely. Ekopress, s.r.o, 2004. s. 173-175

Výchozí odhadované parametry Vašíčkova modelu následně dopočítáme dle uvedených vztahů:

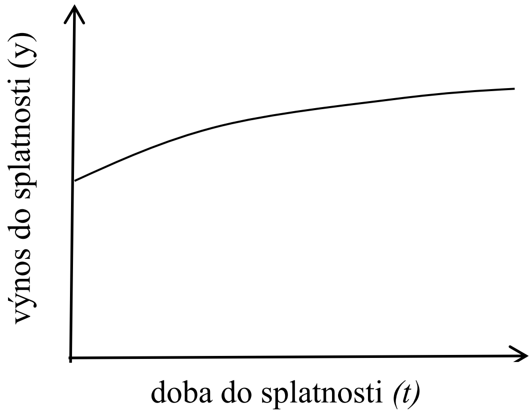
$$a = \frac{-\tilde{\beta}}{\Delta t}, \tag{3.9}$$

$$b = \frac{\frac{\tilde{\alpha}}{\hat{a}}}{\Delta t}, \tag{3.10}$$

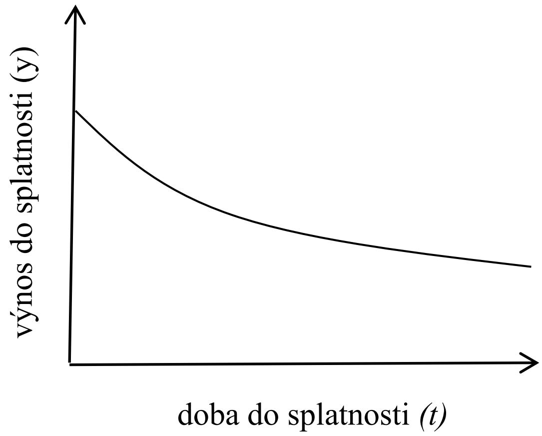
$$\sigma = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\Delta t}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{N}\sum_t \varepsilon_t^2}}{\sqrt{\Delta t}}. \tag{3.11}$$

Možné tvary výnosových křivek v případě použití Vašíčkova modelu ukazují následující grafy.

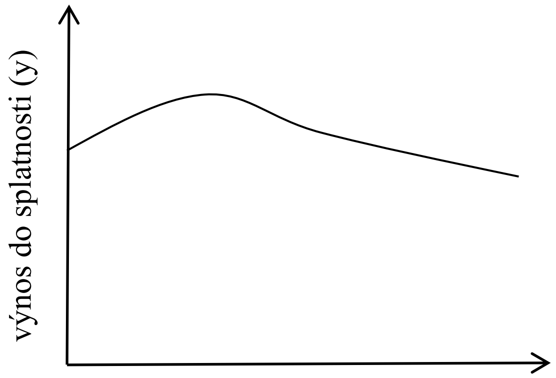
Graf 3.1



Graf 3.2



Graf 3.3



Zdroj: konstrukce vlastní, Hull, J.C.: Options, Futures and Other Derivatives. 6th ed. New Jersey: Prentice - Hall, 2006.

3.1.2 Cox–Ingersol–Rossův model (CRI)

CIR model odstraňuje základní nedostatek Vašíčkova modelu, který spočívá v tom, že krátkodobá úroková sazba může nabývat i negativních hodnot. Dále také zachovává možnost analytického zpracování. Rizikově neutrální proces pro *r* je v daném modelu následující:

$$dr = a(b - r)dt + \sigma\sqrt{r}dz. \tag{3.12}$$

Cox – Ingersol-Rossův model má taktéž vlastnost *mean reversion,* tedy zahrnuje „návrat k průměru“, ale standardní odchylka je úměrná $\sqrt{r}$. Tedy pokud vzroste krátkodobá úroková sazba, vzroste i její směrodatná odchylka.[17] CIR model připouští stejné tvary výnosových křivek jako Vašíčkův model

3.1.3 Ho-Lee model (HLM)

Ho a Lee navrhli první z nearbitrážních modelů výnosové křivky v roce 1986. Tento model obsahoval dva parametry, tj. směrodatnou odchylku krátkodobé sazby a tržní cenu rizika krátkodobé sazby.[18]

Předpoklad tohoto modelu spočívá v tom, že okamžitá úroková míra sleduje proces

$$dr(t) = \theta(t)dt + \sigma dz, \tag{3.13}$$

[17] Hull, J.C.: Options, Futures and Other Derivatives. 6th ed. New Jersey: Prentice - Hall, 2006. s. 653
[18] Hull, J.C.: Options, Futures and Other Derivatives. 6th ed. New Jersey: Prentice - Hall, 2006. s. 654-655

kde σ je okamžitá směrodatná odchylka krátkodobé sazby, je považována za konstantní. $\theta(t)$ je funkce času, vybraná tak, aby model byl v souladu s počáteční výnosovou křivkou. Proměnná $\theta(t)$ určuje průměrný stav, kterým se *r* pohybuje v čase *t*. A je nezávislá na *r*. Je možné ji určit následovně:

$$\theta(t) = F_t(0,t) + \sigma^2 t, \tag{3.14}$$

kde *F(0,t)* je okamžitá forwardová sazba na období *(0,t)*. Položíme-li $\theta(t)$ rovno $F_t(0,t)$, pak průměrný směr krátkodobých úrokových sazeb v čase je roven sklonu okamžité forwardové křivky.

Nevýhodou tohoto modelu je, že může vést k záporným úrokovým sazbám a nebere v úvahu návrat úrokových sazeb k dlouhodobé rovnováze.

3.1.4 Hull White model (HWM)

Hull a White prozkoumali rozšíření Vašíčkova modelu, které přesně odpovídá počáteční výnosové křivce. Verze rozšířeného modelu je následující:

$$dr = (\theta(t) - ar)dt + \sigma dz \tag{3.15}$$

nebo

$$dr = a\left[\frac{\theta(t)}{a} - r\right]dt + \sigma dz, \tag{3.16}$$

kde *a* a σ jsou konstanty. Hull-White model může být charakterizován jako Ho-Lee model s mean reversion procesem při sazbě *a*. Alternativně může být charakterizován jako Vašíčkův model s nezávislou hodnotou návratu. V čase *t* se krátkodobá sazba vrací k $\frac{\theta(t)}{a}$ při sazbě *a*. Ho-Lee model je konkrétní případ Hull-White modelu při *a=0*.

Funkci $\theta(t)$ je možné vypočítat z počáteční výnosové křivky dle vztahu:

$$\theta(t) = F_t(0,t) + aF(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}). \tag{3.17}$$

Poslední výraz v rovnici je obvykle docela malý. Jestliže jej budeme ignorovat, poté míra změny *r* v čase *t* je rovna $F_t(0,t)+a[F(0,t)-r]$. Z toho je možné vidět, že při průměrném *r* přibližně navazuje na sklon okamžité počáteční forwardové sazby. Pokud se odchýlí od křivky, vrací se zpět při sazbě *a*.

3.2 Analytické modely oceňování finančních derivátů na úrokové sazby

V této části práce budou popsány analytické metody oceňování úrokových derivátů na bázi modelů úrokových sazeb.

3.2.1 Oceňování úrokových derivátů pomocí Vašíčkova modelu

Cenu dluhopisu v čase *t* s nominální hodnotou 1Kč lze vyjádřit následovně:[19]

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r(t)}. \tag{3.18}$$

V této rovnici je *r(t)* hodnota *r* v čase *t*,

$$B(t,T) = \frac{1-e^{-a(T-t)}}{a} \tag{3.19}$$

a

$$A(t,T) = exp\left[\frac{(B(t,T)-T+t)(a^2b-\sigma^2/2}{a^2} - \frac{\sigma^2 B(t,T)^2}{4a}\right]. \tag{3.20}$$

Pokud *a=0*,

$$B(t,T) = T - t$$

a

$$A(t,T) = exp[\frac{\sigma^2 \cdot (T-t)^3}{6}],$$

poté dostaneme:

$$R(t,T) = -\frac{1}{T-t} lnA(t,T) + \frac{1}{T-t} B(t,T)r(t). \tag{3.21}$$

Oceňování evropských opcí na bezkupónové dluhopisy pomocí Vašíčkova modelu

Cena evropské call opce na bezkupónový dluhopis v čase *t*, s dobou splatnosti v čase *T*, je:[20]

$$c = LP(0,s)N(h) - KP(0,T)N(h - \sigma_p), \tag{3.22}$$

[19] Hull, J.C.: Options, Futures and Other Derivatives. 6th ed. New Jersey: Prentice - Hall, 2006. s. 652
[20] Hull, J.C.: Options, Futures and Other Derivatives. 6th ed. New Jersey: Prentice - Hall, 2006. s. 658

kde,

$$h = \frac{1}{\sigma_p} ln \frac{LP(0,s)}{P(0,T)K} + \frac{\sigma_p}{2}, \tag{3.23}$$

$$\sigma_p = \frac{\sigma}{a}\left[1 - e^{-a(s-T)}\right]\sqrt{\frac{1-e^{-2aT}}{2a}}, \tag{3.24}$$

L je jistina dluhopisu, K je realizační cena a s datum splatnosti obligace.

Cena evropské put opce je:

$$p = KP(0,T)N\left(-h + \sigma_p\right) - LP(0,s)N(-h). \tag{3.25}$$

Oceňování evropských opcí na kupónové dluhopisy pomocí Vašíčkova modelu

Ceny opcí na kupónové dluhopisy lze určit pomocí ceny opcí na bezkupónové dluhopisy.[16] V této části tedy bereme v úvahu evropskou call opci na kupónový dluhopis s realizační cenou K a se splatností v čase T. Dále uvažujeme, že dluhopis přináší souhrn n cash-flow po čase splatnosti opce (T).

Označíme:

r^* hodnota krátkodobé úrokové sazby, při které je cena kupónového dluhopisu rovna realizační ceně,

CF_i cash-flow v čase s_i, ($1 \leq i \leq n;\ s_i > T$)

K_i hodnota bezkupónového dluhopisu v čase T s nominální hodnotou 1 Kč v čase s_i, při které se $r = r^*$,

$P(T,s_i)$ cena bezkupónového dluhopisu v čase T se splatností v čase s_i.

Cenu evropské call opce (c) určíme pomocí následujících vzorců:

$$K_i = CF \cdot P(T,s), \tag{3.26}$$

$$c = LP(0,s)N(h) - K_i P(0,T)N\left(h - \sigma_p\right). \tag{3.27}$$

Z výše uvedeného lze říci, že opce za kupónový dluhopis je součtem n opcí na bezkupónové dluhopisy. Obdobně je možné vyjádřit i put opci na kupónový dluhopis.

3.2.2 Oceňování úrokových derivátů pomocí CIR modelu

Ceny dluhopisů u tohoto modelu vycházejí ze stejného vzorce jako Vašíčkův model:[15]

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r(t)}, \tag{3.28}$$

ale funkce *B(t,T) a A(t, T)* jsou odlišné, tj.,

$$B(t,T) = \frac{2(e^{\gamma(T-t)}-1)}{(\gamma+a)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma} \tag{3.29}$$

a

$$A(t,T) = \left[\frac{2\gamma e^{(a+\gamma)(T-t)/2}}{(\gamma+a)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma}\right]^{2ab/\sigma^2}, \tag{3.30}$$

kde,

$$\gamma = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}. \tag{3.31}$$

Tvary výnosových křivek jsou stejné jako u Vašíčkova modelu. Dlouhodobá sazba *R(t,T)* je lineárně závislá na *r(t)*. To znamená, že hodnota *r(t)* určuje úroveň struktury v čase *t*. Obecný tvar struktury v čase *t* je nezávislý na *r(t)*, ale závisí na *t*.[15]

Evropské opce na kupónové i bezkupónové dluhopisy je možno oceňovat pomocí postupu, který byl popsán u Vašíčkova modelu.

3.2.3 Oceňování úrokových derivátů pomocí Ho-Lee modelu

Výraz pro cenu bezkupónového dluhopisu v čase *t* je:

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-r(t)(T-t)}, \tag{3.32}$$

kde,

$$lnA(t,T) = ln\frac{P(0,T)}{P(0,t)} - (T-t)\frac{\partial lnP(0,t)}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 t(T-t)^2. \tag{3.33}$$

V této rovnici je současnost označena nulou. Časy *t* a *T* jsou časy v budoucnosti za podmínky, že *T*≥*t*. Rovnice proto definují cenu diskontovaného dluhopisu v budoucím čase *t* a ceny dluhopisů dnes. Cena dluhopisu může být vypočítána z dnešní časové struktury.

Hodnotu výrazu $\frac{\partial lnP(0,t)}{\partial t}$ je možné přibližně odhadnout z výnosové křivky pomocí vztahu:

$$\frac{lnP(0,t+\varepsilon)-lnP(0,t-\varepsilon)}{2\varepsilon}, \tag{3.34}$$

kde ε je krátký časový interval, např. 0,01 roku.

Oceňování evropských opcí na bezkupónové dluhopisy pomocí Ho-Lee modelu

Cena evropské call opce na bezkupónový dluhopis v čase *T*, s dobou splatnosti v čase *s*, je:[21]

$$c = LP(0,s)N(h) - KP(0,T)N(h-\sigma_p), \tag{3.35}$$

kde *L* jistina dluhopisu, *K* je realizační cena a

$$h = \frac{1}{\sigma_p} ln\frac{LP(0,s)}{P(0,T)K} + \frac{\sigma_p}{2}, \tag{3.36}$$

$$\sigma_p = \sigma(s-T)\sqrt{T}. \tag{3.37}$$

Cena put opce dluhopisu je:

$$p = KP(0,T)N(-h+\sigma_p) - LP(0,s)N(-h). \tag{3.38}$$

Oceňování evropských opcí na kupónové dluhopisy pomocí Ho-Lee modelu

Při oceňování evropských opcí na kupónové dluhopisy vycházíme z cen opcí na diskontované dluhopisy.

3.2.4 Oceňování úrokových derivátů pomocí Hull-White modelu

Ceny dluhopisů v čase *t* v Hull-White modelu jsou dány:

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r(t)}, \tag{3.39}$$

kde

$$B(t,T) = \frac{1-e^{-a(T-t)}}{a} \tag{3.40}$$

a

$$lnA(t,T) = ln\frac{P(0,T)}{P(0,t)} - B(t,T)\frac{\partial lnP(0,t)}{\partial t} - \frac{1}{4a^3}\sigma^2(e^{-aT}-e^{-at})^2(e^{2at}-1). \tag{3.41}$$

[21] Hull, J.C.: Options, Futures and Other Derivatives. 6th ed. New Jersey: Prentice - Hall, 2006. s. 658

Cena call opce na bezkupónový dluhopis v čase T, s dobou splatnosti v čase s, je:[22]

$$c = LP(0,s)N(h) - KP(0,T)N(h - \sigma_p), \tag{3.42}$$

kde L jistina dluhopisu, K je realizační cena a

$$h = \frac{1}{\sigma_p} ln \frac{LP(0,s)}{P(0,T)K} + \frac{\sigma_p}{2}, \tag{3.43}$$

$$\sigma_p = \frac{\sigma}{a}\left[1 - e^{-a(s-T)}\right]\sqrt{\frac{1-e^{-2aT}}{2a}}, \tag{3.44}$$

Cena put opce dluhopisu je:

$$p = KP(0,T)N(-h + \sigma_p) - LP(0,s)N(-h). \tag{3.45}$$

3.3 Numerické metody oceňování finančních derivátů na bázi stromových diagramů úrokových sazeb

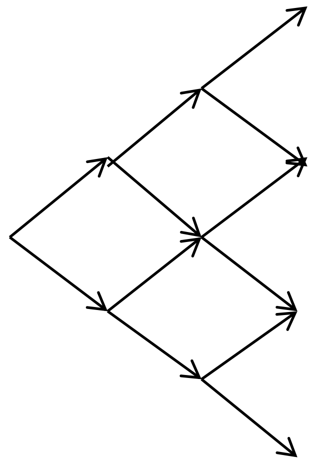
Do numerických metod oceňování na bázi stromových diagramů úrokových sazeb patří především dva základní modely, tj. binomický model a trinomický model oceňování finančních derivátů. U těchto metod je možné určit cenu úrokového derivátu přibližným způsobem.

Stromový diagram je časově nespojité znázornění stochastického vývoje krátkodobé úrokové sazby. Při sestavování diagramu se předpokládá, že období Δt se vyvíjí dle stejného stochastického procesu jako okamžitá sazba v časově spojitém modelu.

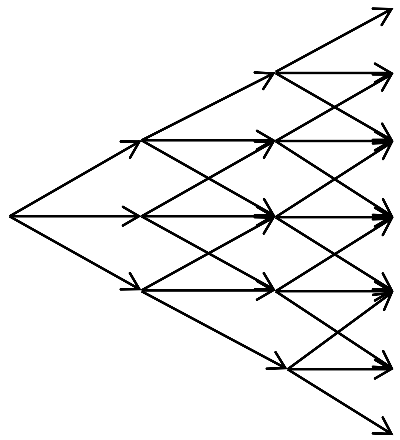
Rozhodovací strom pro binomický model oceňování úrokových derivátů znázorňuje *Graf 3.4* a rozhodovací strom pro trinomický model oceňování úrokových derivátů znázorňuje *Graf 3.5.*

[22] Hull, J.C.: Options, Futures and Other Derivatives. 6th ed. New Jersey: Prentice - Hall, 2006. s. 658

Graf 3.4 Rozhodovací strom pro binomický model



Graf 3.5 Rozhodovací strom pro trinomický model



Zdroj: konstrukce vlastní, Hull, J.C.: Options, Futures and Other Derivatives. 6th ed. New Jersey: Prentice - Hall, 2006.

3.3.1 Binomický model oceňování derivátů na úrokové sazby na bázi Ho-Lee modelu

Základní postup oceňování finančních derivátů na úrokové sazby pomocí binomického modelu vychází z rizikově neutrálního přístupu a operace kalibrace. Výhoda binomického modelu spočívá v tom, že se jedná o jednoduchý a pružný nástroj pro ocenění velkého množství derivátů. Naopak nevýhodou je pracnost a časová náročnost.

Vycházíme-li z předpokladu, že se krátkodobé úrokové sazby vyvíjí podle diskrétního Ho-Lee modelu, pak binomický model[23] udává hodnotu r dle následujícího vztahu:

$$r_{t,s} = a_t + b_t \cdot s, \tag{3.46}$$

kde $r_{t,s}$ je krátkodobá sazba, t je index času určování parametrů, s je stav, a_t je průměrná úroková sazba v čase t a b_t je volatilita.

Parametr volatility je možné určit ze vztahu $b_t = 0{,}5 \cdot \sigma_t$. Dále uvažujeme, že rizikově neutrální pravděpodobnost růstu i poklesu je rovna 0,5.

Neznámou hodnotou v tomto modelu je parametr a_t. Tento parametr určíme na základě propočtu elementárních cen dluhopisů pro různé doby splatnosti za předpokladu nemožnosti arbitráže. Propočet ceny elementárního dluhopisu v každém uzlu binomického modelu je možné vyjádřit dle následujícího vzorce:

$$P_{t,s} = (1 + r_{t,s})^{-1} \cdot 0{,}5 \cdot \left[P_{t+1,s+1}(n) + P_{t+1,s-1}(n)\right], \tag{3.47}$$

kde $P_{t,s}$ jsou ceny v čase t a stavu s u obligace s n lety splatnosti. Pro splnění podmínky arbitráže musí platit předpoklad. Jestliže $P_{t,s} \geq 0$, pak $\left(P_{t+1,s+1} \geq 0 \wedge P_{t+1,s-1} \geq 0\right)$.

Po výše uvedeném propočtu následuje proces kalibrace, tedy úprava náhodných krátkodobých sazeb tak, aby se kalibrované elementární ceny dluhopisů rovnaly tržním cenám v době rozhodování, $P'_{00}(n) = P_{00}(n)$. Dalším krokem je zjištění implicitních podmíněných forwardových sazeb dle vztahu:

$$f_{t-1,t} = \frac{P_0(t-1)}{P_0(t)} - 1. \tag{3.48}$$

Dále následuje propočet náhodného vývoje podkladového aktiva a výpočet vnitřní hodnoty dluhopisu. Pro výpočet vnitřní hodnoty call opce využijeme vztah:

$$VH_{t,s} = \max\left(B_{t,s} - X; 0\right). \tag{3.49}$$

[23] Zmeškal, Z. a kolektiv: Finanční modely. Ekopress, s.r.o, 2004. s. 134

Obdobným způsobem lze vyjádřit vnitřní hodnotu pro put opci, tj.:

$$VH_{t,s} = \max(X - B_{t,s}; 0). \quad (3.50)$$

Poslední krok spočívá v určení ceny opce zpětně od doby zralosti opce. Platí, že cena opce v době zralosti ($F_{T,s}$) se rovná vnitřní hodnotě ($VH_{T,s}$), tj. $F_{T,s} = VH_{T,s}$. Poté je zpětně rekurentním postupem propočtena cena evropské opce jako současná hodnota střední hodnoty opce v následujícím období dle vztahu:

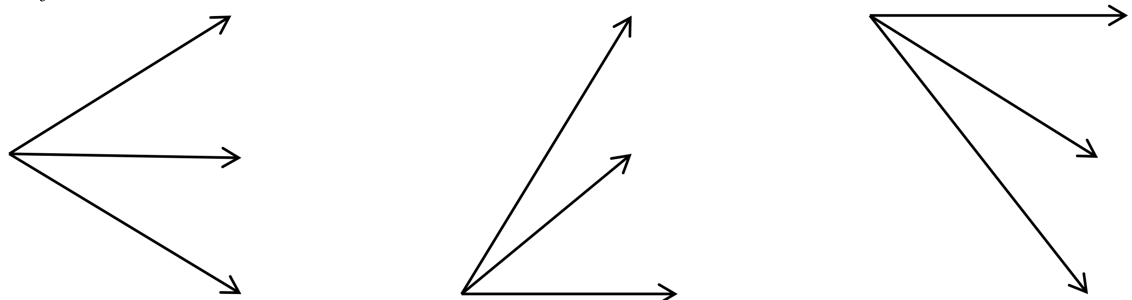
$$F_{t,s} = (1 + r_{t,s})^{-1} \cdot 0{,}5 \cdot \left[F_{t+1,s+1}^{u} + F_{t+1,s-1}^{u}\right]. \quad (3.51)$$

3.3.2 Trinomický model oceňování derivátů na úrokové sazby na bázi Hull-White modelu

Použití trinomických stromů se často ukazuje vhodnější než použití binomických. Hlavní výhodou je, že poskytují větší míru volnosti, usnadňují znázornění prvků vývoje úrokových sazeb, jako je „návrat k průměru".[24]

Hull a White definovali níže uvedené způsoby větvení trinomického stromu. Obvyklé větvení je zobrazeno v *Grafu a* „jedna větev nahoru, jedna rovně a jedna dolů". Jiný způsob je „dvě nahoru, jedna rovně". Tohle je užitečné při zahrnutí „návratu k průměru" v případech, kdy jsou úrokové sazby velmi nízké. Třetí možnost větvení zobrazená v *Grafu c* je „jedna rovně, dvě dolů", což je užitečné při zahrnutí „návratu k průměru" v případech, kdy jsou úrokové sazby velmi vysoké.

Graf 3.6



(a) *(b)* *(c)*

Zdroj: konstrukce vlastní, Hull, J.C.: Options, Futures and Other Derivatives. 6th ed. New Jersey: Prentice - Hall, 2006.

[24] Hull, J.C.: Options, Futures and Other Derivatives. 6th ed. New Jersey: Prentice - Hall, 2006. s. 660

Hull a White navrhli dvoufázový postup, který vysvětluje konstrukci trinomických diagramů umožňujících znázornění široké škály jednofaktorových modelů.

1.fáze

Model Hull-White pro okamžitou krátkodobou sazbu *r* je:

$$dr = [\theta(t) - a \cdot r]dt + \sigma \cdot dz. \tag{3.52}$$

Prvním krokem je vytvoření trinomického stromu pro proměnnou r^*. Hodnota této proměnné je na počátku rovna nule a její další vývoj je následující:

$$dr^* = -ar^* dt + \sigma \cdot dz. \tag{3.53}$$

Proměnná $r^*(t + \Delta t) - r^*(t)$ má normální rozložení. Pokud období delší než Δt nebereme v úvahu, střední hodnota $r^*(t + \Delta t) - r^*(t)$ je $-ar^*(t)\Delta t$ a odchylka $\sigma^2 \Delta t$. Rozestupy mezi úrokovými sazbami v diagramu jsou dány následujícím vztahem:

$$\Delta r = \sigma\sqrt{3\Delta t}. \tag{3.54}$$

Nejprve je nutné určit způsob větvení modelu a následně se musí vypočítat pravděpodobnosti jednotlivých větví.

Definujeme (*i,j*) jako uzel, pro který je $t=i\Delta t$ a $r^*= j\Delta r$. Zvolená metoda větvení musí vždy vést k tomu, aby všechny tři pravděpodobnosti byly pozitivní. Ve většině případů je vhodné větvení podle *Grafu a.* Pokud je $a>0$, je nutné přejít na větvení dle *Grafu b* pro dostatečně velké *j*. Podobně je nutné přejít k větvení podle *Grafu c* v případech dostatečně záporného *j*.

Označení P_u, p_m, p_d jsou pravděpodobnosti nejvyšší, střední a nejnižší větve vycházející z uzlu. V případě standardního větvení jsou dány následujícími rovnicemi:

$$p_u \Delta r - p_d \Delta r = -aj\Delta r \Delta t, \tag{3.55}$$

$$p_u \Delta r^2 + p_d \Delta r^2 = \sigma^2 \Delta t + a^2 j^2 \Delta r^2 \Delta t^2, \tag{3.56}$$

$$p_u + p_m + p_d = 1. \tag{3.57}$$

Použijeme-li v těchto rovnicích za $\Delta r = \sigma\sqrt{3\Delta t}$, dostaneme:

$$p_u = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(a^2 j^2 \Delta t^2 - aj\Delta t), \tag{3.58}$$

$$p_m = \frac{2}{3} - a^2 j^2 \Delta t^2, \tag{3.59}$$

$$p_d = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(a^2 j^2 \Delta t^2 + aj\Delta t). \tag{3.60}$$

Podobně pro větvení vycházející z Grafu *b*

$$p_u = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(a^2 j^2 \Delta t^2 - aj\Delta t), \tag{3.61}$$

$$p_m = -\frac{1}{3} - a^2 j^2 \Delta t^2 - 2aj\Delta t, \tag{3.62}$$

$$p_d = \frac{7}{6} + \frac{1}{2}(a^2 j^2 \Delta t^2 + 3aj\Delta t). \tag{3.63}$$

Nakonec pro větvení znázorněné v Grafu *c*, jsou pravděpodobnosti dány následovně:

$$p_u = \frac{7}{6} + \frac{1}{2}(a^2 j^2 \Delta t^2 - 3aj\Delta t), \tag{3.64}$$

$$p_m = -\frac{1}{3} - a^2 j^2 \Delta t^2 + 2aj\Delta t, \tag{3.65}$$

$$p_d = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(a^2 j^2 \Delta t^2 - aj\Delta t). \tag{3.66}$$

2.fáze

Ve druhé fázi konstrukce stromového diagramu převedeme strom pro r^* na strom pro r tak, aby se shodoval s počáteční výnosovou křivkou.

Definujeme:

$$\alpha(t) = r(t) - r^*(t). \tag{3.67}$$

Je proto nutno zjistit hodnotu parametru α. Tento parametr určíme obdobně jako u binomického modelu za předpokladu nemožnosti arbitráže iterační metodou na základě propočtu elementárních cen obligací v každém uzlu trinomického modelu za použití následujícího vztahu:

$$P_{t,s} = (1 + r_{t,s})^{-1} \cdot \big[p_u(P_{t+1,s+1}(n) + p_m P_{t+1,s}(n) + p_d P_{t+1,s-1}(n)\big], \qquad (3.68)$$

kde $P_{t,s}$ jsou ceny v čase t a stavu s u obligace s n lety splatnosti. Pro splnění podmínky arbitráže musí platit předpoklad. Jestliže $P_{t,s} \geq 0$, pak $\big(P_{t+1,s+1} \geq 0 \wedge P_{t+1,s-1} \geq 0\big)$.

Dále následuje proces kalibrace, tj. úprava náhodných krátkodobých sazeb tak, aby se kalibrované elementární ceny dluhopisů rovnaly tržním cenám v době rozhodování. Dalším krokem je zjištění implicitních podmíněných forwardových sazeb dle vztahu:

$$f_{t-1,t} = \frac{P_0(t-1)}{P_0(t)} - 1. \qquad (3.69)$$

Následuje propočet náhodného vývoje podkladového aktiva a výpočet vnitřní hodnoty dluhopisu. Vnitřní hodnota call opce je vypočítána dle následujícího vztahu:

$$VH_{t,s} = \max\big(B_{t,s} - X; 0\big). \qquad (3.70)$$

Obdobně lze vyjádřit vnitřní hodnotu pro put opci:

$$VH_{t,s} = \max\big(X - B_{t,s}; 0\big). \qquad (3.71)$$

Poslední krok spočívá v určení ceny opce zpětně od doby zralosti opce. Platí, že cena opce v době zralosti ($F_{T,s}$) se rovná vnitřní hodnotě ($VH_{T,s}$), tj. $F_{T,s} = VH_{T,s}$. Poté je zpětně rekurentním postupem propočtena cena evropské opce jako současná hodnota střední hodnoty opce v následujícím období dle vztahu:

$$F_{t,s} = (1 + r_{t,s})^{-1} \cdot \big[p_u \cdot F^u_{t+1,s+1} + p_m \cdot F^u_{t+1,s+1} + p_d \cdot F^u_{t+1,s-1}\big]. \qquad (3.72)$$

4. Ověření vybraných metod oceňování derivátů na úrokové sazby

V této části diplomové práce budou použity vybrané oceňovací modely na dva druhy dluhopisů, tj. bezkupónový dluhopis ČM ST.SP. 0,00/20 a st. dluhopis 2,80/13. Ocenění bude tedy provedeno prostřednictvím analytických a numerických metod, tj. Vašíčkův model, CIR model, Ho-Lee model, Hull White model, binomický model oceňování úrokových derivátů na bázi Ho-Lee modelu a trinomický model oceňování úrokových derivátů na bázi Hull-White modelu. Pro účely porovnání vybraných metod použijeme případ pro výpočet ceny evropské call opce na dluhopis k datu 20.2.2011. Výhodou tohoto kontraktu je možnost ocenění všemi vybranými metodami.

4.1 Vstupní data

Metody oceňování finančních derivátů na úrokové sazby nyní použijeme na dva druhy dluhopisů. A to bezkupónový dluhopis a dluhopis s pravidelnou výplatou kupónu. Údaje těchto dluhopisů jsou přístupny z Burzy cenných papírů Praha, tj. na http://www.pse.cz/Cenne-Papiry/ a jsou uspořádány v následující *Tabulce 4.1.*

Tabulka 4.1. Vstupní údaje dluhopisů

Název dluhopisu	ČM ST.SP. 0,00/20	St. dluhopis 2,80/13
Jmenovitá hodnota CP	10 000	10 000
Počet kusů v emisi	1 000	4 358 707
Datum emise	13.1.2010	1.2.2010
Datum splatnosti emise	13.1.2020	16.9.2013
Úroková sazba	0,00%	2,80%
Datum výplaty kuponu	13.1.2020	16.9.2011
Kurz [%]	64,72	99,59

Realizační cena (K) opce je u prvního dluhopisu stanovena ve výši 9 200 Kč a u druhého dluhopisu ve výši 10 150 Kč. Datum splatnosti opce (T) je 31.12.2011 a oceňování opcí probíhá k 20.2.2011.

4.2 Konstrukce výnosové křivky

Výnosová křivka byla sestavena k okamžiku oceňování, tj. k 20.2.2011 pomocí kupónových státních dluhopisů bez zahrnutí vlivu zdanění. Vstupní údaje pro konstrukci výnosové křivky uvádí *Tabulka 4.2*

Tabulka 4.2 Vstupní údaje státních dluhopisů

Typ státního dluhopisu	Kupón (%)	NH	Tržní cena	Splatnost
státní dluhopis 4,10/11	4,10%	10000	10180	18.10.2011
státní dluhopis 3,55/12	3,55%	10000	10000	18.10.2012
státní dluhopis 3,70/13	3,70%	10000	10100	16.6.2013
státní dluhopis 3,75/14	3,75%	10000	10010	11.4.2014
státní dluhopis 3,80/15	3,80%	10000	9920	11.4.2015
státní dluhopis 6,95/16	6,95%	10000	10000	26.2.2016
státní dluhopis 4,00/17	4,00%	10000	9900	11.4.2017
státní dluhopis 4,60/18	4,60%	10000	9960	18.8.2018
státní dluhopis 5,00/19	5,00%	10000	9970	11.4.2019
státní dluhopis 3,75/20	3,75%	10000	9300	12.9.2020
státní dluhopis 3,85/21	3,85%	10000	10033	29.9.2021
státní dluhopis 4,70/22	4,70%	10000	9500	12.9.2022

Než přikročíme k tvorbě spotové výnosové křivky, tak je pro zjednodušení zaveden předpoklad stanovení data výplaty kupónu na 11. dubna. Po zavedení tohoto předpokladu je nutné přepočítat výši kupónu a to za pomoci bezrizikové sazby ve výši 3,29%. Nové kupóny poté uvádí *Tabulka 4.3*

Tabulka 4.3 Kupóny státních dluhopisů

Typ obligace	Interval	Úrok	Diskont	Kupón k 11.4.
státní dluhopis 4,10/11	190/365	-	7,02	402,98
státní dluhopis 3,55/12	190/365	-	6,08	348,92
státní dluhopis 3,70/13	66/365	-	6,34	363,66
státní dluhopis 3,75/14	0	-	-	375,00
státní dluhopis 3,80/15	0	-	-	380,00
státní dluhopis 6,95/16	44/365	2,77	-	697,77
státní dluhopis 4,00/17	0	-	-	400,00
státní dluhopis 4,60/18	129/365	-	5,35	454,65
státní dluhopis 5,00/19	0	-	-	500,00
státní dluhopis 3,75/20	154/365	-	5,21	369,79
státní dluhopis 3,85/21	170/365	-	5,34	379,66
státní dluhopis 4,70/22	154/365	-	6,52	463,48

Konstrukce spotové výnosové křivky vychází ze vztahu, kdy se současná hodnota plateb plynoucích z dané obligace rovná aktuální tržní ceně obligace. Nejdříve tedy musíme určit aktuální tržní cenu obligace dle vzorce

$$TCO = čistý\ kurz \cdot \frac{NH}{100} + AUV, \tag{4.1}$$

kde *NH* je nominální hodnota obligace a *AUV* je alikvótní úrokový výnos, který představuje poměrnou část kupónu odpovídající intervalu od poslední výplaty kupónu, tj.

$$AUV = kupón\ \cdot \Delta t. \tag{4.2}$$

Následně si určíme současné hodnoty peněžních toků plynoucích z obligace dle vztahů (2.18) a (2.19).

Hledanou proměnnou je výnos do splatnosti dílčích diskontovaných dluhopisů. Při výpočtu začínáme u dluhopisu, který má nejkratší dobu do splatnosti, tj. státní dluhopis 4,10/11. Cenu tohoto dluhopisu můžeme vyjádřit následovně dle (2.15):

$$10318{,}01 = \frac{10000 + 402{,}98}{(1 + y_1)^1}.$$

Spotová úroková míra je dle výše uvedeného výpočtu ve výši 0,82% p.a. Podobným způsobem určujeme i výnos do splatnosti u ostatních státních dluhopisů, tj. státní dluhopis 3,55/12 se vypočítá dle (2.16) jako:

$$10119{,}49 = \frac{348{,}92}{(1 + y_1)^1} + \frac{10000 + 348{,}92}{(1 + y_2)^2}.$$

Hodnota spotové úrokové míry y_1=0,82%. Neznámou hodnotou je tedy pouze y_2. Řešením uvedené rovnice dostáváme spotovou úrokovou míru y_2=2,90% p.a. Popsaným způsobem postupujeme až do té doby, kdy získáme body na celé spotové výnosové křivce. Následně je možné odvodit forwardovou výnosovou křivku za předpokladu nemožnosti arbitráže, zanedbání transakčních nákladů a stejné výše zápůjční a výpůjční sazby.

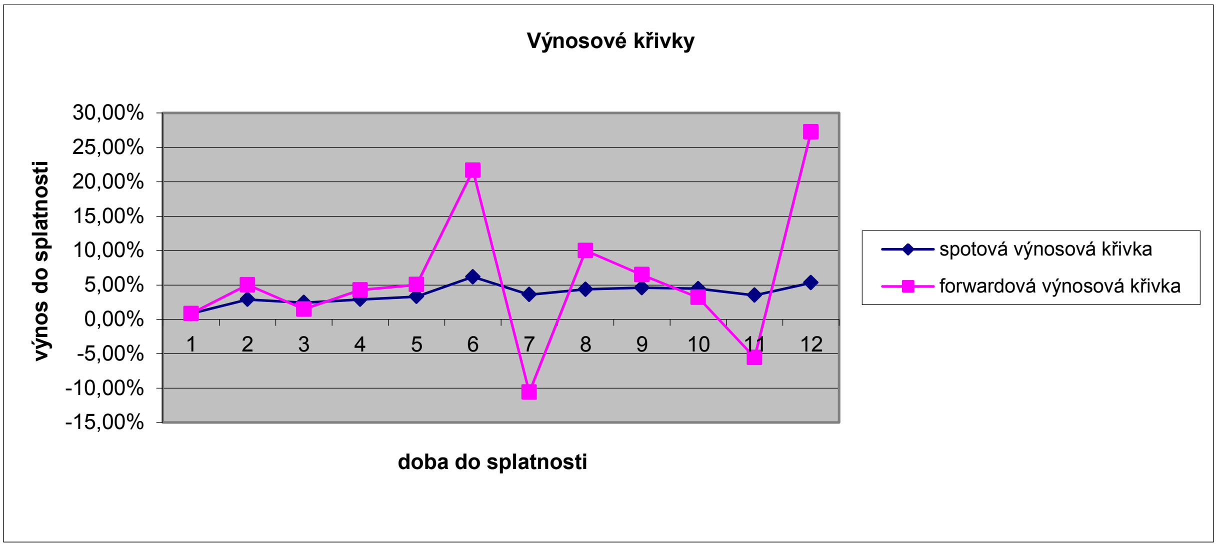
Při sestavování forwardové křivky vycházíme z toho, že se v prvním roce spotová a forwardová úroková míra rovnají, tj. f_1=0,82%.

V druhém roce při výpočtu vycházíme ze vztahu (2.23), tedy

$$f_2 = \frac{(1+2{,}90)^2}{(1+0{,}82)^1} - 1.$$

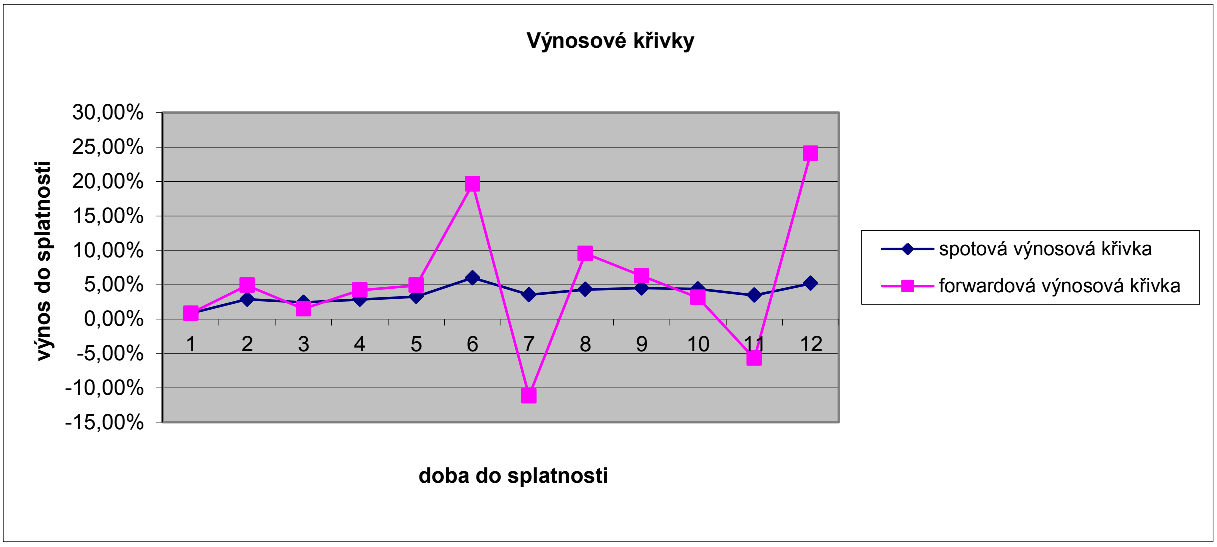
Hodnota f_2 je poté rovna 5,02%. Stejný způsob využijeme při výpočtu ostatních bodů forwardové výnosové křivky. Spotovou i forwardovou výnosovou křivku pro diskrétní úročení znázorňuje následující *Graf 4.4.*

Graf 4.4 Spotová a forwardová křivka pro diskrétní úročení



Obdobným způsobem postupujeme při konstrukci spotové a výnosové křivky pro spojité úročení za použití vztahů (2.24) a (2.25), tedy graf výnosových křivek pro spojité úročení poté vypadá následovně.

Graf 4.5 Spotová a forwardová křivka pro spojité úročení



4.3 Analytický přístup ocenění opcí pomocí Vašíčkova modelu

Pomocí tohoto modelu analyticky oceníme evropskou call opci na dluhopis. Postup ocenění byl popsán v teoretické části 3.2.1, ze které budeme dále při výpočtech pro stanovení ceny evropské call opce na dluhopis vycházet. Ocenění provádíme k 20.2.2011. Datum splatnosti opce (*T)* je stanoveno na 31.12.2011.

Prvním krokem, který vede k ocenění opce, je určení parametrů Vašíčkova modelu, mezi které řadíme *a, b* a *σ.* Parametr *a* je parametr rychlosti přibližování k dlouhodobé rovnováze, parametr *b* je dlouhodobě očekávaná úroková míra a σ vyjadřuje celkovou volatilitu.

Obecný odhadovaný model úrokových sazeb metodou nejmenších čtverců (MNČ) je popsán v kapitole 3.1.1. Za krátkodobou úrokovou sazbu byl zvolen 1D PRIBOR. Při výpočtu vyjdeme z historické časové řady úrokových sazeb za období 4. ledna - 31. prosince 2010. Tyto údaje jsou přístupny ze zdroje České národní banky (ČNB),
tj.: http://www.cnb.cz/cs/financni_trhy/penezni_trh/pribor/denni.jsp?date=DD.MM.RRRR.

Pro výpočet zmíněných parametrů je nejprve nutné dopočítat náhodný přírůstek úroků Δ*r.* Dále následuje statistický odhad lineárního modelu regresní metodou nejmenších čtverců dle (3.7) a využití modulu *Regrese* v Excelu. Jednotlivé parametry jsou dopočteny dle vztahů (3.9), (3.10) a (3.11) a jejich hodnoty jsou uspořádány v následující *Tabulce 4.6.*

Tabulka 4.6 Vstupní parametry Vašíčkova modelu

Parametr	Hodnota
a	0,0511
b	0,0083
σ	0,0077

Posouzení statistické spolehlivosti parametrů a modelu jako celku je vyhodnoceno dle t-testu a F-testu. Hodnoty statistické verifikace jsou uvedeny v následující tabulce.

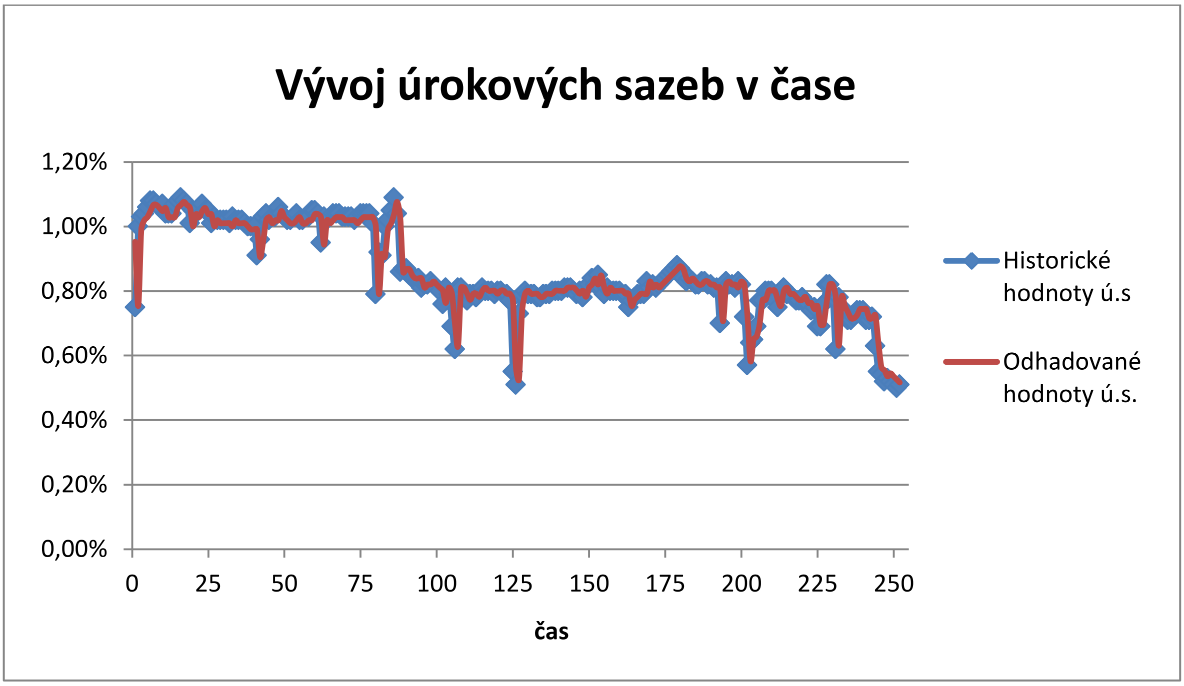
Tabulka 4.7 Statistická verifikace

t kritické	1,969422365	<	t Stat	2,18225169
F kritické	3,878624453	<	F vypočítané	5,3071944
α	0,05	>	Hodnota P	0,02205841

V daném případě se ukázalo, že parametry lineárního modelu jsou dle Hodnoty P na 5% hladině spolehlivosti statisticky významné. Model tedy může být využit pro odhad úrokových sazeb.

Vývoj historických a odhadovaných hodnot úrokových sazeb znázorňuje *Graf 4.8*

Graf 4.8 Vývoj úrokových sazeb v čase



Po zjištění vstupních parametrů Vašíčkova modelu, je možné přikročit k výpočtu ceny evropské call opce na uvedené dluhopisy.

4.3.1 Ocenění evropské call opce na dluhopis ČM ST.SP. 0,00/20

Postup ocenění opcí pomocí Vašíčkova modelu byl popsán v kapitole 3.2.1. Uvažujeme dluhopis s nulovým kupónem ČM. ST. SP. 0,00/20. Nominální hodnota dluhopisu je 10 000 Kč při splatnosti $s = 8 + \frac{327}{365}$. Realizační cena X je ve výši 9 200 Kč a datum splatnosti opce *T* je 31.12.2011, tedy $\frac{314}{365}$.

Hodnoty vstupních dat uvádí *Tabulka 4.9*

Tabulka 4.9 Vstupní data dluhopisu ČM ST.SP. 0,00/20 pro Vašíčkův model

NH	10 000
X	9 200
T	0,8603
s	8,8959

Stanovení opce na dluhopis je provedeno dle vzorců (3.18), (3.19), (3.21), (3.22) a (3.23), (3.24) tedy výpočet je následující:

$$B\left(0;\frac{314}{365}\right) = 0{,}841645,\quad B(0;8+\frac{327}{365}) = 7{,}148915,$$
$$A\left(0;\tfrac{314}{365}\right) = 1{,}000055,\quad A\left(0;8+\tfrac{327}{365}\right) = 1{,}005179,$$
$$P\left(0;\frac{314}{365}\right) = 0{,}993012,\qquad P\left(0;8+\frac{327}{365}\right) = 0{,}946614.$$
$$\sigma_p = 0{,}045803,\quad h = 0{,}798619,\quad h-\sigma_p = 0{,}752817.$$

Nyní je možné určit hodnotu evropské call opce dle vzorce (3.22), tj.:

$$c = 10000\cdot P\left(0;8+\frac{327}{365}\right)\cdot N(0{,}798619) - 9200\cdot P\left(0;\frac{314}{365}\right)\cdot N(0{,}752817) =$$
$$= 383{,}8469\ K\text{č}.$$

Vašíčkův model udává hodnotu evropské call opce na dluhopis ČM ST.SP. 0,00/20 přibližně ve výši 383,85 Kč.

4.3.2 Ocenění evropské call opce na st. dluhopis 2,80/13

Uvažujeme st. dluhopis 2,80/13. Nominální hodnota dluhopisu je 10 000 Kč při splatnosti s = $2+\frac{208}{365}$. Realizační cena X je ve výši 10 150 Kč a datum splatnosti opce *T* je 31.12.2011, tedy $\frac{314}{365}$. Hodnoty jsou uvedeny v *Tabulce 4.10.*

Tabulka 4.10 Vstupní data st. dluhopisu 2,80/13 pro Vašíčkův model

NH	10 000
X	10 150
T	0,8603
s_0	0,5699
s_1	1, 5699
s_2	2, 5699

Cenu evropské call opce na kupónový dluhopis lze určit pomocí ceny opce na bezkupónové dluhopisy. Hodnota ceny opce na kupónový dluhopis je tedy součtem 2 opcí na bezkupónové dluhopisy. V případě bezrizikové úrokové míry *r*, je hodnota dluhopisu po 2 letech následující:

$$10150 = 280 \cdot A\left(\frac{314}{365}; 1 + \frac{208}{365}\right) \cdot e^{-B\left(\frac{314}{365}; 1 + \frac{208}{365}\right) \cdot r} +$$
$$+10280 \cdot A\left(\frac{314}{365}; 2 + \frac{208}{365}\right) \cdot e^{-B\left(\frac{314}{365}; 2 + \frac{208}{365}\right) \cdot r}.$$

$$B\left(\frac{314}{365}; 1 + \frac{208}{365}\right) = 0{,}696882, \quad B\left(\frac{314}{365}; 2 + \frac{208}{365}\right) = 1{,}637064,$$
$$A\left(\frac{314}{365}; 1 + \frac{208}{365}\right) = 1{,}000037, \quad A\left(\frac{314}{365}; 2 + \frac{208}{365}\right) = 1{,}000214.$$

Z uvedených výpočtů dostáváme:

$$10150 = 280 \cdot 1{,}000037 \cdot e^{-0{,}696882 \cdot r} + 10280 \cdot 1{,}000214 \cdot e^{-1{,}637064 \cdot r}.$$

Dále je potřeba určit hodnotu budoucí krátkodobé úrokové sazby, při které je hodnota kupónové obligace rovna realizační ceně. Ta je určena prostřednictvím optimalizační úlohy ve výši 2,47% podle

Účelové funkce

$$\sum_{i=1}^{n} \{CF_i P(T, s_i) - X\} \to 0 \qquad (4.3)$$

Opce na kupónový dluhopis je potom součtem níže uvedených 2 opcí na bezkupónové dluhopisy s těmito parametry:

a) opce s realizační cenou 275,23 Kč a datem splatnosti opce $\frac{314}{365}$ na diskontovaný dluhopis s nominální hodnotou 280 a dobou splatnosti $1 + \frac{208}{365}$,
b) opce s realizační cenou 9 874,77 a datem splatnosti opce $\frac{314}{365}$ na diskontovaný dluhopis s nominální hodnotou 10 280 Kč a dobou splatnosti $2 + \frac{208}{365}$.

Cena 1. opce:

$$c_1 = 280 \cdot P\left(0; 1 + \frac{208}{365}\right) \cdot N(0{,}173475) - 275{,}23 \cdot P\left(0; \frac{314}{365}\right) \cdot N(0{,}168632) = 0{,}6404.$$

Cena 2. opce:

$$c_2 = 10280 \cdot P\left(0; 2 + \frac{48}{365}\right) \cdot N(0{,}176751) - 9874{,}77 \cdot P\left(0; \frac{314}{365}\right) \cdot N(0{,}165374) =$$
$$= 54{,}0046.$$

Celková cena evropské call opce je potom součtem hodnot těchto dvou opcí:

$$c = 0{,}6404 + 54{,}0046 = 54{,}6450\ Kč.$$

Hodnota evropské call opce na st. dluhopis 2,80/13 zjištěná pomocí Vašíčkova modelu je přibližně ve výši 54, 65 Kč.

4.4 Analytický přístup ocenění opcí pomocí CIR modelu

Ocenění opcí pomocí CIR modelu je obdobné jako u Vašíčkova modelu. Spočívá ve stanovení ceny bezkupónového dluhopisu a dále ve stanovení ceny opce na tento dluhopis. Tento postup je popsán v kapitole 3.2.2. Ocenění je prováděno k 20.2.2011.

Za krátkodobou úrokovou sazbu byl zvolen 1D PRIBOR. Při výpočtu vyjdeme z historické časové řady úrokových sazeb za období 4. ledna - 31. prosince 2010. Tyto údaje jsou přístupny ze zdroje České národní banky (ČNB),
tj.: http://www.cnb.cz/cs/financni_trhy/penezni_trh/pribor/denni.jsp?date=DD.MM.RRRR.

Prvním krokem, tak jako u Vašíčkova modelu, je určení parametrů *a, b* a σ. Při výpočtu postupujeme obdobným způsobem jako u Vašíčkova modelu, tedy nejprve dopočítáme náhodný přírůstek úroků Δr. Dále následuje statistický odhad lineárního modelu regresní metodou nejmenších čtverců a využití modulu *Regrese* v Excelu..

Vypočítané hodnoty jsou uspořádány v následující *Tabulce 4.11*.

Tabulka 4.11 Vstupní parametry CIR modelu

Parametr	Hodnota
a	0,0511
b	0,0083
σ	0,0055

Posouzení statistické spolehlivosti parametrů a modelu jako celku je vyhodnoceno dle t-testu a F-testu. Hodnoty statistické verifikace jsou uvedeny v následující tabulce.

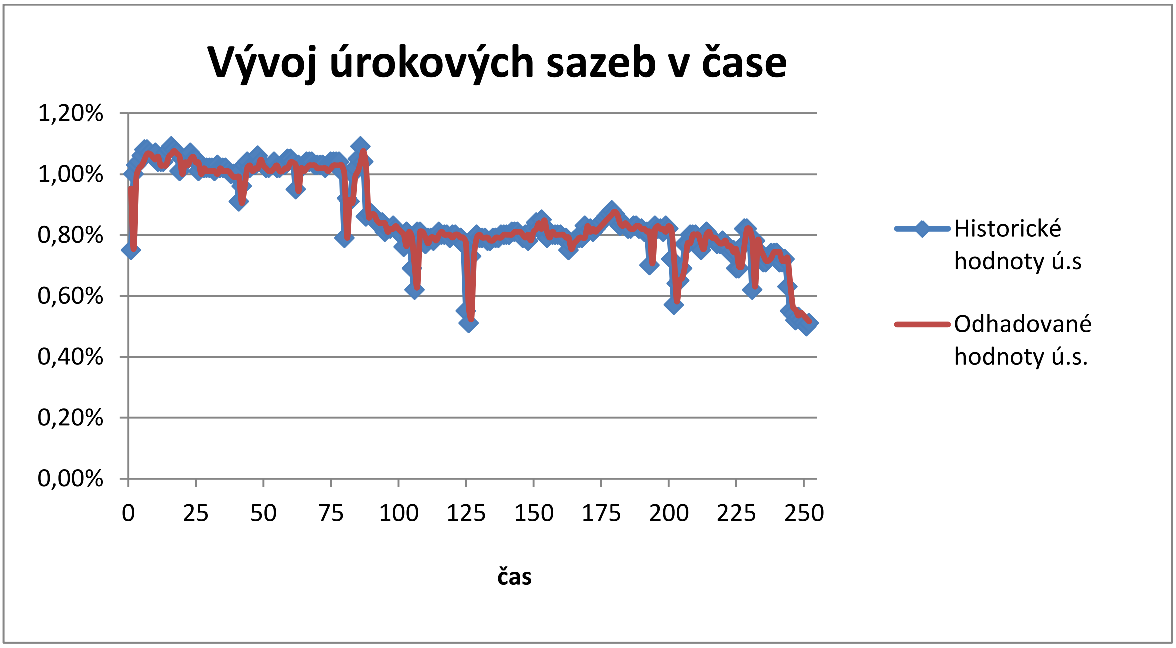
Tabulka 4.12 Statistická verifikace

t kritické	1,969422365	<	t Stat	2,18225169
F kritické	3,878624453	<	F vypočítané	5,3071944
α	0,05	>	Hodnota P	0,02205841

V daném případě se ukázalo, že parametry lineárního modelu jsou dle Hodnoty P na 5% hladině spolehlivosti statisticky významné. Model je možno využít pro odhad úrokových sazeb.

Vývoj historických a odhadovaných hodnot úrokových sazeb znázorňuje *Graf 4.13.*

Graf 4.13 Vývoj úrokových sazeb v čase



Nyní je možné přikročit k výpočtu ceny evropské call opce na dluhopis.

4.4.1 Ocenění evropské call opce na dluhopis ČM ST.SP. 0,00/20

Uvažujeme dluhopis ČM ST.SP. 0,00/20 u kterého vycházíme ze stejných hodnot jako v předchozím případě.

Tabulka 4.14 Vstupní data dluhopisu ČM ST.SP. 0,00/20 pro CIR model

NH	10 000
X	9 200
T	0,8603
s	8,8959

Stanovíme tedy cenu evropské call opce na dluhopis s nominální hodnotou 10 000 Kč, realizační cenou 9 200 Kč a dobou do splatnosti opce $\frac{314}{365}$. Vycházíme z postupu ocenění, který byl popsán v kapitole 3.2.1. a 3.2.2 za použití vzorců (3.22), (3.23), (3.24), (3.28), (3.29), (3.30), (3.31).

Hodnotu evropské call opce určíme dle vzorce (3.22):

$$c = 10000 \cdot P\left(0; 8 + \frac{327}{365}\right) \cdot N(0{,}505265) - 9200 \cdot P\left(0; \frac{314}{365}\right) \cdot N(0{,}472181) =$$
$$= 210{,}20\ Kč.$$

CIR model tak udává cenu evropské call opce na dluhopis ČM ST.SP. 0,00/20 přibližně ve výši 210,2 Kč.

4.4.2 Ocenění evropské call opce na st. dluhopis 2,80/13

Uvažujeme st. dluhopis 2,80/13 u kterého jsou vstupní hodnoty uvedeny v následující tabulce.

Tabulka 4.15 Vstupní data st. dluhopisu 2,80/13 pro CIR model

NH	10 000
X	10 150
T	0,8603
s_0	0,5699
s_1	1,5699
s_2	2,5699

Hodnota budoucí krátkodobé úrokové sazby, při které je hodnota kupónové obligace rovna realizační ceně byla určena prostřednictvím optimalizační úlohy (4.3) ve výši 2,42%. Cenu call opce na kupónový dluhopis určíme dle postupu uvedeného v teoretické části 3.2.2 za použití vzorců (3.27), (3.28), (3.29), (3.30), (3.31).

Opce na kupónový dluhopis je součtem 2 opcí na bezkupónové dluhopisy s těmito parametry:

a) opce s realizační cenou 275,29 Kč a datem splatnosti opce $\frac{314}{365}$ na diskontovaný dluhopis s nominální hodnotou 280 a dobou splatnosti $1 + \frac{208}{365}$,
b) opce s realizační cenou 9 874,71 a datem splatnosti opce $\frac{314}{365}$ na diskontovaný dluhopis s nominální hodnotou 10 280 Kč a dobou splatnosti $2 + \frac{208}{365}$.

Cena 1. opce:

$$c_1 = 280 \cdot P\left(0; 1 + \frac{208}{365}\right) \cdot N(0{,}138428) - 275{,}29 \cdot P\left(0; \frac{314}{365}\right) \cdot N(0{,}134930) = 0{,}4445.$$

Cena 2. opce:

$$c_2 = 10280 \cdot P\left(0; 2 + \frac{48}{365}\right) \cdot N(0{,}140842) - 9874{,}71 \cdot P\left(0; \frac{314}{365}\right) \cdot N(0{,}132625) = \\ = 37{,}4673.$$

Celková cena evropské call opce je potom součtem hodnot těchto dvou opcí:

$$\text{c} = 0{,}4445 + 37{,}4673 = 37{,}9118\ Kč.$$

Hodnota evropské call opce na st. dluhopis 2,80/13 zjištěná pomocí CIR modelu je přibližně ve výši 37,91 Kč.

4.5 Analytický přístup ocenění opcí pomocí Ho-Lee modelu

Ocenění call opce dle Ho-Lee modelu popisuje kapitola 3.2.3. Ocenění je prováděno k 20.2.2011. Tento model je sestaven tak, aby byl v souladu se vstupní výnosovou křivkou.

Prvním krokem je určení parametru σ, který je jediným neznámým parametrem Ho-Lee modelu. Tento parametr byl vypočítán na základě historické časové řady úrokových sazeb.

Za krátkodobou úrokovou sazbu byl zvolen 1D PRIBOR za období 4. ledna - 31. prosince 2010. Tyto údaje jsou přístupny ze zdroje České národní banky (ČNB), tj.: http://www.cnb.cz/cs/financni_trhy/penezni_trh/pribor/denni.jsp?date=DD.MM.RRRR.

Náhodný vývoj *r* je možné v souladu se vztahy (3.13) a (3.14) vyjádřit jako:

$$\Delta r = \theta(t) \cdot \Delta t + \sigma \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot z, \tag{4.4}$$

$$\theta(t) = F_t(0, t). \tag{4.5}$$

Rovnici (4.4) budeme nejprve řešit za podmínky, že výraz $\sigma \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot z$ je roven nule, tedy:

$$\Delta r = F_t(0, t) \cdot \Delta t. \tag{4.6}$$

Tento vztah je v souladu s předpokladem Ho-Lee modelu, tj. aby model byl v souladu s počáteční výnosovou křivkou.

Neznámý parametr σ pak určíme na základě odchylek ε_t, tj. rozdílem mezi skutečnými a modelovanými hodnotami proměnné Δr na základě vztahu:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_t \varepsilon_t^2}, \tag{4.7}$$

kde N je počet pozorování. Po provedení výpočtu odpovídá parametr σ hodnotě 0,0115.

V dalším kroku je již možné přikročit ke stanovení ceny evropské call opce.

4.5.1 Ocenění evropské call opce na dluhopis ČM ST.SP. 0,00/20

Vstupní parametry pro dluhopis ČM ST.SP. 0,00/20 zveřejňuje následující tabulka.

Tabulka 4.16 Vstupní data dluhopisu ČM ST.SP. 0,00/20 pro Ho-Lee model

NH	10 000
X	9 200
σ	0,0115
T	0,8603
s	8,8959
ε	0,01

Při ocenění vycházíme z postupu, který byl popsán v kapitole 3.2.3 za použití vztahů (3.32), (3.33), (3.34), (3.35), (3.36), (3.37) s výše uvedenými hodnotami, tj. s nominální hodnotou 10 000 Kč, realizační cenou 9 200 Kč a dobou do splatnosti opce $\frac{314}{365}$.

Hodnotu evropské call opce určíme dle (3.35):

$$c = 10000 \cdot P\left(0; 8 + \frac{327}{365}\right) \cdot N(0{,}904331) - 9200 \cdot P\left(0; \frac{314}{365}\right) \cdot N(0818814) =$$
$$= 792{,}2428\ Kč.$$

Ho-Lee model udává cenu evropské call opce na dluhopis ČM ST.SP. 0,00/20 ve výši 792,24 Kč.

4.5.2 Ocenění evropské call opce na st. dluhopis 2,80/13

Uvažujeme st. dluhopis 2,80/13 u kterého jsou vstupní hodnoty uvedeny v následující tabulce.

Tabulka 4.17 Vstupní data st. dluhopisu 2,80/13 pro Ho-Lee model

NH	10 000
X	10 150
σ	0,0115
T	0,8603
s_0	0,5699
s_1	1, 5699
s_2	2, 5699
ε	0,01

Hodnotu bezkupónového dluhopisu určíme dle vztahů popsaných v kapitole 3.2.3, tj. (3.32), (3.33), (3.34). Dále následuje určení hodnoty budoucí krátkodobé úrokové sazby, při které je hodnota kupónové obligace rovna realizační ceně. Ta byla opět určena prostřednictvím optimalizační úlohy ve výši 4,11%.

Opce na kupónový dluhopis je opět součtem 2 opcí na bezkupónové dluhopisy s těmito parametry:

a) opce s realizační cenou 280,64 Kč a datem splatnosti opce $\frac{314}{365}$ na diskontovaný dluhopis s nominální hodnotou 280 a dobou splatnosti $1 + \frac{208}{365}$,

b) opce s realizační cenou 9 869,36 a datem splatnosti opce $\frac{314}{365}$ na diskontovaný dluhopis s nominální hodnotou 10 280 Kč a dobou splatnosti $2+\frac{208}{365}$.

Cena 1. opce:

$$c_1 = 280 \cdot P\left(0; 1+\frac{208}{365}\right) \cdot N(-1{,}111777) - 280{,}64 \cdot P\left(0; \frac{314}{365}\right) \cdot N(-1{,}119328) =$$
$$= 0{,}1367.$$

Cena 2. opce:

$$c_2 = 10280 \cdot P\left(0; 2+\frac{48}{365}\right) \cdot N(-0{,}453883) - 9869{,}36 \cdot P\left(0; \frac{314}{365}\right) \cdot N(-0{,}472077) =$$
$$= 36{,}4573.$$

Celková cena evropské call opce je tedy určena následovně:

$$\mathrm{c} = 0{,}1367 + 37{,}4673 = 36{,}5940\ K\check{c}.$$

Hodnota evropské call opce na st. dluhopis 2,80/13 zjištěná Ho-Lee metodou je 36,6 Kč.

4.6 Analytický přístup ocenění opcí pomocí Hull-White modelu

Ocenění call opce podle Hull - White modelu popisuje kapitola 3.2.4. Ocenění je prováděno k 20.2.2011.

První krokem je jako v ostatních případech určení neznámých parametrů modelu. V případě Hull-White modelu jde o parametry a a σ. Tyto parametry jsou určeny z dat historické časové řady úrokových sazeb. Za krátkodobou úrokovou sazbu byl zvolen 1D PRIBOR za období 4. ledna - 31. prosince 2010. Tyto údaje jsou přístupny ze zdroje České národní banky,

tj.:http://www.cnb.cz/cs/financni_trhy/penezni_trh/pribor/denni.jsp?date=DD.MM.RRRR.

Náhodný vývoj r je možné v souladu se vztahy (3.15) a (3.17) vyjádřit jako:

$$\Delta r = (\theta(t) - ar) \cdot \Delta t + \sigma \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot z, \tag{4.8}$$

$$\theta(t) = F_t(0,t) + aF(0,t). \tag{4.9}$$

Rovnici (4.8) budeme opět nejprve řešit za podmínky, že výraz $\sigma \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot z$ je roven nule, tedy:

$$\Delta r = (F_t(0,t) + aF(0,t) - ar) \cdot \Delta t. \tag{4.10}$$

Tento vztah je v souladu s předpokladem Hull-White modelu, tj. aby model byl v souladu s počáteční výnosovou křivkou. Parametr *a* je v modelu určen prostřednictvím optimalizační úlohy ve výši 0,75.

Neznámý parametr σ pak dopočteme na základě odchylek ε_t, tj. rozdílem mezi skutečnými a modelovanými hodnotami proměnné Δr na základě vztahu:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_t \varepsilon_t^2}, \tag{4.11}$$

kde *N* je počet pozorování. Po provedení výpočtu odpovídá parametr σ hodnotě 0,0126.

4.6.1 Ocenění evropské call opce na dluhopis ČM ST.SP. 0,00/20

Vstupní parametry pro dluhopis ČM ST.SP. 0,00/20 zveřejňuje následující tabulka.

Tabulka 4.18 Vstupní data dluhopisu ČM ST.SP. 0,00/20 pro Hull-White model

NH	10 000
X	9 200
σ	0,0126
a	0,75
T	0,8603
s	8,8959
ε	0,01

Při ocenění call opce postupujeme dle kapitoly 3.2.4 za použití vztahů (3.39), (3.40), (3.41), (3.42), (3.43), (3.44) s uvedenými hodnotami, tj. s nominální hodnotou 10 000 Kč, realizační cenou 9 200 Kč a dobou do splatnosti opce $\frac{314}{365}$.

Hodnotu evropské call opce určíme následovně:

$$c = 10000 \cdot P\left(0; 8 + \frac{327}{365}\right) \cdot N(11{,}6293) - 9200 \cdot P\left(0; \frac{314}{365}\right) \cdot N(11{,}6177) = 1340{,}33\ Kč$$

Hull-White model udává cenu evropské call opce na dluhopis ČM ST.SP. 0,00/20 ve výši 1340,33 Kč.

4.6.2 Ocenění evropské call opce na st. dluhopis 2,80/13

Uvažujeme st. dluhopis 2,80/13, jehož hodnoty uvádí následující tabulka.

Tabulka 4.19 Vstupní data st. dluhopisu 2,80/13 pro Hull-White model

NH	10 000
X	10 150
σ	0,0115
a	0,75
T	0,8603
s_0	0,5699
s_1	1, 5699
s_2	2, 5699
ε	0,01

Hodnotu bezkupónového dluhopisu lze vyjádřit dle vztahů popsaných v kapitole 3.2.4, tj. (3.39), (3.40), (3.41), (3.42), (3.43), (3.44). Hodnota budoucí krátkodobé úrokové sazby v době splatnosti opce zjištěná pomocí optimalizační úlohy je 14,71%.

Opce na kupónový dluhopis je jako v předchozích případech součtem 2 opcí na bezkupónové dluhopisy s těmito parametry:

a) opce s realizační cenou 292,71 Kč a datem splatnosti opce $\frac{314}{365}$ na diskontovaný dluhopis s nominální hodnotou 280 a dobou splatnosti $1+\frac{208}{365}$,
b) opce s realizační cenou 9 857,29 a datem splatnosti opce $\frac{314}{365}$ na diskontovaný dluhopis s nominální hodnotou 10 280 Kč a dobou splatnosti $2+\frac{208}{365}$.

Tedy celková hodnota evropské call opce na st. dluhopis 2,80/13 zjištěná Hull-White metodou po součtu činí 26,5 Kč.

4.7 Numerický přístup ocenění opcí pomocí binomického modelu na bázi Ho-Lee modelu

Postup pro ocenění opce pomocí tohoto modelu je podrobně rozepsán v teoretické části 3.3.1. U binomického modelu oceňování úrokových derivátů vycházíme z předpokladu, že se krátkodobé úrokové sazby vyvíjí podle diskrétního Ho-Lee modelu. Prvním krokem je určení parametru σ, který je jediným neznámým parametrem Ho-Lee modelu. Určení tohoto parametru bylo již provedeno v kapitole 4.5, proto můžeme dále pokračovat v procesu oceňování.

4.7.1 Ocenění evropské call opce na dluhopis ČM ST.SP. 0,00/20

Vstupní parametry pro dluhopis ČM ST.SP. 0,00/20 zveřejňuje následující tabulka.

Tabulka 4.20 Vstupní data dluhopisu ČM ST.SP. 0,00/20 pro binomický model na bázi Ho-Lee modelu

NH	10 000
X	9 200
σ	0,0115
b	0,0057
T	0,8603
s	8,8959
p_u	0,5
p_d	0,5

Parametr volatility b je možné určit ze vztahu $b_t = 0{,}5 \cdot \sigma_t$. Dále uvažujeme, že rizikově neutrální pravděpodobnost růstu i poklesu je rovna 0,5.

Nejprve je nutné vyjádřit náhodný vývoj krátkodobých úrokových sazeb v jednotlivých uzlech dle vztahu (3.46). Následuje propočet elementárních cen dluhopisů s nulovým kupónem pro každé období binomického modelu a to zpětným rekurentním postupem od doby splatnosti jako současná hodnota střední hodnoty následujícího období podle vzorce (3.47).

Dalším krokem je kalibrace, tj. úprava náhodných krátkodobých sazeb tak, aby se propočtené ceny dluhopisů rovnaly aktuálním tržním cenám v době rozhodování. Jako výchozí hodnoty za a_t před optimalizací byly přiřazeny forwardy. Využijeme zde funkci řešitele jako úlohu nelineárního programování, kde a_t je vektor proměnných. Účelová funkce je minimalizace sumy relativních kvadratických odchylek mezi kalibrovanými a tržními cenami.

Účelová funkce

$$\sum_n \left[\frac{P_{00}'(n)-P_{00}(n)}{P_{00}(n)}\right]^2 \rightarrow min. \tag{4.12}$$

kde

$r_{t,s} = a_t + b_t \cdot s,$ pro *t,s,*

$P_{t,s} = (1 + r_{t,s})^{-1} \cdot 0{,}5 \cdot [P_{t+1,s+1}(n) + P_{t+1,s-1}(n)],$ pro *t,s,n.*

Následujícím krokem je zjištění hodnoty dluhopisu. Vzhledem k tomu, že jde o dluhopis s nulovým kupónem, počítáme pouze s nominální hodnotou a kupónem rovným nule. Dále následuje výpočet vnitřní hodnoty dluhopisu v jednotlivých uzlech binomického modelu. Poslední krok spočívá v určení ceny opce zpětně od doby zralosti opce. V době zralosti opce dosadíme za cenu opce vypočtenou vnitřní hodnotu a poté zpětně rekurentním postupem propočítáme cenu evropské opce jako současnou hodnotu střední hodnoty opce v následujícím období.

Binomický model po uvedeném propočtu udává cenu evropské call opce na dluhopis ČM ST.SP. 0,00/20 ve výši 435,74 Kč.

4.7.2 Ocenění evropské call opce na st. dluhopis 2,80/13

Uvažujeme st. dluhopis 2,80/13, jehož hodnoty jsou zaznamenány v následující tabulce.

Tabulka 4.21 Vstupní data st. dluhopisu 2,80/13 pro binomický model na bázi Ho-Lee modelu

NH	10 000
X	10 150
σ	0,0115
b	0,0057
T	0,8603
s	2, 5699
p_u	0,5
p_d	0,5

Parametr volatility b určíme opět ze vztahu $b_t = 0{,}5 \cdot \sigma_t$. Taktéž uvažujeme, že rizikově neutrální pravděpodobnost růstu i poklesu je rovna 0,5.

Prvním krokem jako v předchozím případě je vyjádření náhodného vývoje krátkodobých úrokových sazeb v jednotlivých uzlech binomického modelu dle vztahu (3.46).

Následuje propočet elementárních cen dluhopisů s nulovým kupónem pro každé období binomického modelu pomocí zpětného rekurentního postupu od doby splatnosti jako současná hodnota střední hodnoty následujícího období dle vzorce (3.47).

Následuje proces kalibrace, který je proveden tak, aby se propočtené ceny dluhopisů rovnaly aktuálním tržním cenám v době rozhodování. Jako výchozí hodnoty za a_t před optimalizací byly přiřazeny forwardy. Dále opět využijeme optimalizační úlohu *Řešitele* v Excelu (4.12), kde ÚF je minimalizace sumy relativních kvadratických odchylek mezi kalibrovanými a tržními cenami.

Následujícím krokem je zjištění hodnoty kupónového dluhopisu. Zde počítáme s nominální hodnotou 10 000 Kč a kupónem ve výši 280 Kč.

Dále následuje výpočet vnitřní hodnoty dluhopisu v jednotlivých uzlech binomického modelu a nakonec určení ceny opce zpětně od doby zralosti opce. V době zralosti opce dosadíme za cenu opce vypočtenou vnitřní hodnotu a poté zpětně rekurentním postupem propočítáme cenu evropské opce jako současnou hodnotu střední hodnoty opce v následujícím období.

Binomický model udává cenu evropské call opce na st. dluhopis 2,80/13 ve výši 229,17 Kč.

4.8 Numerický přístup ocenění opcí pomocí trinomického modelu na bázi Hull-White modelu

Postup pro ocenění opce pomocí trinomického modelu je podrobně rozepsán v teoretické části 3.3.2 a je podobný postupu pro ocenění opce dle binomického modelu. Nejprve, jako ve všech případech, je potřeba určit neznámé parametry. Vycházíme z předpokladu, že se krátkodobé úrokové sazby vyvíjí podle Hull-White modelu a tedy je potřeba stanovit neznámé parametry σ a *a,* což už bylo provedeno v kapitole 4.6.

Dále je potřeba určit typ větvení trinomického stromu, což je v tomto případě standardní typ větvení, tj. „jedna větev nahoru, jedna rovně a jedna dolů“, tak jako ve většině ostatních případů.

4.8.1 Ocenění evropské call opce na dluhopis ČM ST.SP. 0,00/20

Vstupní parametry pro dluhopis ČM ST.SP. 0,00/20 zveřejňuje následující tabulka.

Tabulka 4.22 Vstupní data dluhopisu ČM ST.SP. 0,00/20 pro trinomický model na bázi Hull-White modelu

NH	10 000
X	9 200
σ	0,0126
a	0,75
T	0,8603
s	8,8959

Nejprve je nutné vyjádřit náhodný vývoj krátkodobých úrokových sazeb v jednotlivých uzlech dle vzorce a také je potřeba stanovit rizikově neutrální pravděpodobnosti trinomického modelu dle vzorců (3.55), (3.56) a (3.57) uvedených v teoretické části 3.3.2.

Dále následuje propočet elementárních cen dluhopisů s nulovým kupónem pro každé období trinomického modelu. Cenu určíme zpětným rekurentním postupem od doby splatnosti jako současnou hodnotu cen dluhopisu následujícího období násobené jejich pravděpodobnostmi.

Dalším krokem je kalibrace. Jako výchozí hodnoty za a_t před optimalizací byly opět přiřazeny forwardy. Pomocí optimalizační úlohy *Řešitele* minimalizujeme účelovou funkci, která zajištuje minimalizaci sumy relativních kvadratických odchylek mezi kalibrovanými a tržními cenami.

Dále zjistíme hodnotu dluhopisu, avšak počítáme pouze s nominální hodnotou, jelikož hodnota kupónu je nulová. Poté následuje propočet vnitřní hodnoty dluhopisu v jednotlivých uzlech trinomického modelu a ceny evropské call opce zpětně od doby zralosti opce.

Trinomický model po všech provedených krocích udává cenu evropské call opce na dluhopis ČM ST.SP. 0,00/20 ve výši 1064,26 Kč.

4.8.2 Ocenění evropské call opce na st. dluhopis 2,80/13

Uvažujeme st. dluhopis 2,80/13, jehož hodnoty jsou zaznamenány v následující tabulce.

Tabulka 4.23 Vstupní data st. dluhopisu 2,80/13 pro trinomický model na bázi Hull-White modelu

NH	10 000
X	10 150
σ	0,0126
a	0,75
T	0,8603
s	2, 5699

Při ocenění této opce opět nejprve vyjádříme náhodný vývoj krátkodobých úrokových sazeb v jednotlivých uzlech a stanovíme rizikově neutrální pravděpodobnosti trinomického modelu dle vzorců (3.55), (3.56) a (3.57).

Následující krok spočívá v propočtu elementárních cen dluhopisů s nulovým kupónem v jednotlivých uzlech trinomického modelu. Cena je určena zpětným rekurentním postupem od doby splatnosti. Cena dluhopisu je současnou hodnotou cen dluhopisu v následujícím období násobená jejich pravděpodobnostmi.

Dalším krokem je proces kalibrace, kterou provedeme pomocí úlohy *Řešitele* v Excelu, tedy minimalizujeme účelovou funkci, která zajišťuje minimalizaci sumy relativních kvadratických odchylek mezi kalibrovanými a tržními cenami.

Dále opět zjistíme hodnotu dluhopisu, vnitřní hodnotu dluhopisu v jednotlivých uzlech trinomického modelu a cenu evropské call opce zpětně od doby zralosti opce.

Trinomický model po všech provedených krocích udává cenu evropské call opce na dluhopis ČM ST.SP. 0,00/20 ve výši 26,57 Kč.

4.9 Porovnání jednotlivých modelů

Ve čtvrté kapitole byly provedeny výpočty, které sloužily k ocenění evropské call opce na dluhopisy. Proto je vhodné nyní použité metody oceňování porovnat.

Ceny evropské call opce u propočtených modelů nemusí zcela vypovídat o skutečné ceně, jelikož každý z oceňovacích modelů nemá stejnou vypovídací schopnost. Srovnáme-li volatilitu úrokových sazeb σ, můžeme z následující tabulky vidět, že pro každý model je tato hodnota jiná.

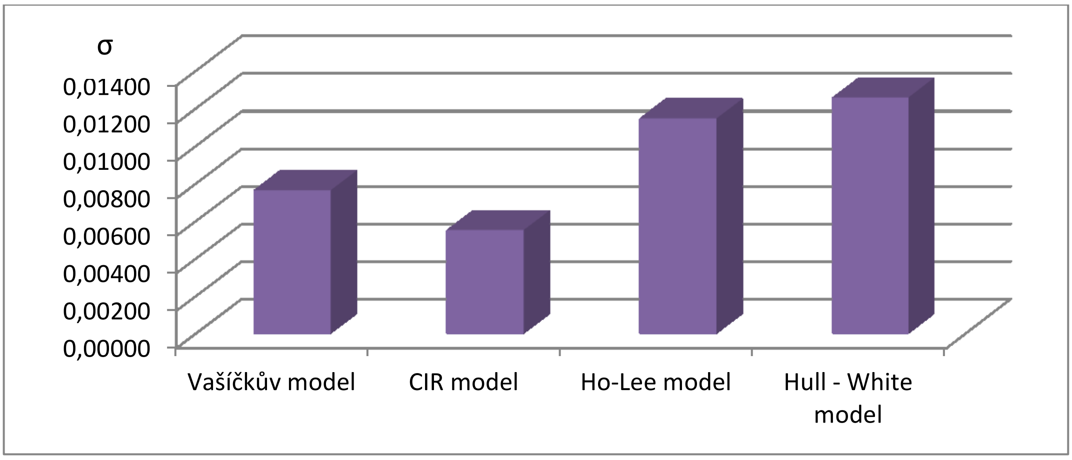
Tabulka 4.24 Volatilita úrokových sazeb pro jednotlivé modely

Model	σ
Vašíčkův model	0,00766
CIR model	0,00553
Ho-Lee model	0,01147
Hull - White model	0,01259

Z této tabulky je patrné, že nejvhodnějším oceňovacím modelem je Cox-Ingersol-Rosův model, vzhledem k nejmenší směrodatné odchylce. Naopak nejvyšší směrodatnou odchylku má Hull-White model.

Pro účely přehlednosti srovnání volatility úrokových sazeb σ je dále využito grafické znázornění tohoto parametru, které můžeme vidět v *Grafu 4.25.*

Graf 4.25 Volatilita úrokových sazeb pro jednotlivé modely



Zaměříme-li se na srovnání cen evropské call opce, které byly vypočítány pomocí vybraných metod oceňování, můžeme v těchto hodnotách vidět rozdílnost. Použité metody oceňování finančních derivátů na úrokové sazby a jejich zjištěné výsledky jsou přehledně uspořádány do *Tabulky 4.26*

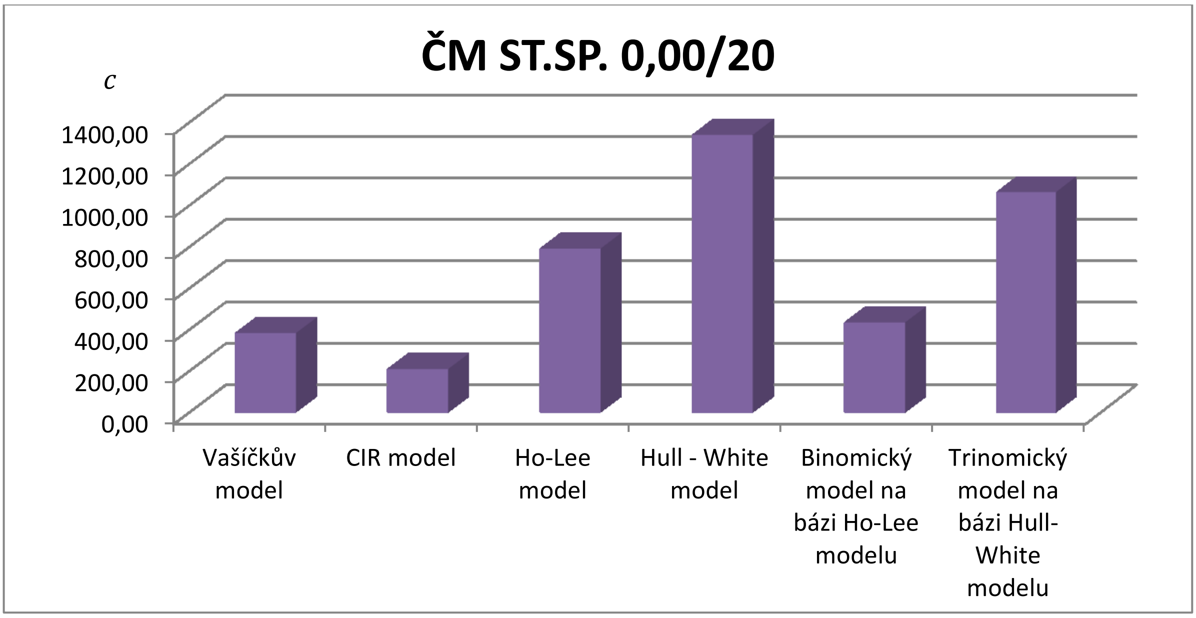
Tabulka 4.26 Ceny evropské call opce vypočítané podle jednotlivých metod

Model	**ČM ST.SP. 0,00/20**	**St. dluhopis 2,80/13**
Vašíčkův model	383,85	54,65
CIR model	210,20	37,91
Ho-Lee model	792,24	36,59
Hull - White model	1340,33	26,49
Binomický model na bázi Ho-Lee modelu	435,74	229,17
Trinomický model na bázi Hull-White modelu	1064,27	26,57

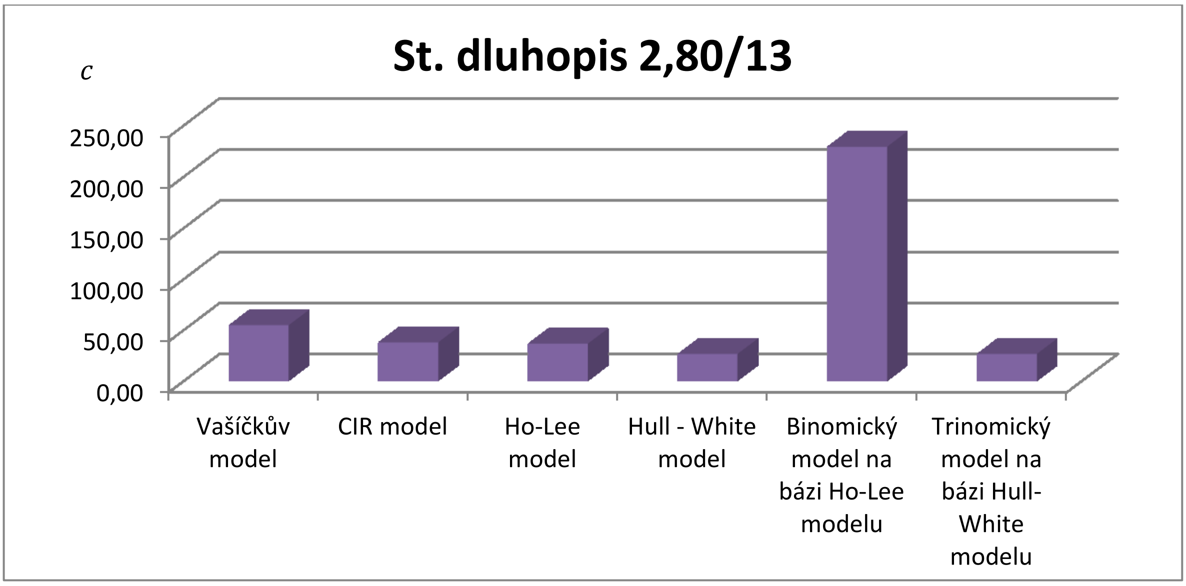
Každý model, pomocí něhož byla vypočítaná hodnota evropské call opce má různé specifické vlastnosti, tedy vzhledem k této skutečnosti jsou hodnoty opce propočtené dle jednotlivých oceňovacích modelů proměnlivé. Na hodnotu evropské call opce mají vliv i jiné parametry, jako například parametr volatility σ, jehož hodnoty byly srovnány v první části této podkapitoly, případně zvolená realizační cena *K*.

V tomto případě je opět vhodné pro účely přehlednosti srovnání cen evropské call opce využití grafické znázornění. Ceny evropské call opce na dluhopis ČM ST.SP. 0,00/20 můžeme vidět v *Grafu 4.27* a ceny evropské call opce na st. dluhopis 2,80/13 můžeme vidět v *Grafu 4.87.*

Graf 4.27 Ceny evropské call opce na dluhopis ČM ST.SP. 0,00/20



Graf 4.28 Ceny evropské call opce na st. dluhopis 2,80/13



Zjištěné ceny evropské call opce pro jednotlivé modely jsou proměnlivé. Pro daná data je v našem případě nejvhodnějším oceňovacím modelem CIR model, jelikož má nejmenší směrodatnou odchylku. Proto je mu přiřazena největší vypovídací schopnost. Dále následuje Vašíčkův model, pro který je směrodatná odchylka menší než u Ho-Lee modelu a Hull-White modelu. Naopak vzhledem k největší směrodatné odchylce má Hull-White model pro daná data nejnižší vypovídací schopnost.

V další části zaměříme pozornost na různé specifické vlastnosti jednotlivých modelů, které je taktéž vhodné porovnat.

Rovnovážné modely berou v úvahu empiricky zjištěnou vlastnost úrokových sazeb, tedy návrat k dlouhodobé rovnováze. Naopak nevýhodou rovnovážných modelů je to, že nemusí odpovídat skutečným úrokovým sazbám. Proto zde může docházet k závažným chybám při stanovení ceny opce. Nevýhoda Vašíčkova modelu spočívá v tom, že může dosahovat záporných úrokových sazeb. Tenhle problém však následně řeší další z oceňovacích modelů, tj. Cox-Ingersoll-Rossův model.

Bezarbitrážní modely jsou navrženy tak, aby byly přesně v souladu se současnou strukturou úrokových sazeb, tedy v souladu se vstupní výnosovou křivkou v době konstrukce modelu. Nevýhodou Ho-Lee modelu je, že nebere v úvahu návrat úrokových sazeb k dlouhodobé rovnováze. Hull a White prozkoumali rozšíření Vašíčkova modelu, které přesně odpovídá počáteční výnosové křivce. Tento model také bere v úvahu návrat úrokových sazeb k dlouhodobé rovnováze.

Numerické metody oceňování finančních derivátů na úrokové sazby určují cenu úrokového derivátu přibližným způsobem. Zde patří již zmíněný binomický model na bázi Ho-Lee modelu a trinomický model na bázi Hull-White modelu. Výhoda binomického modelu spočívá v jednoduchosti a pružnosti při ocenění velkého množství derivátů. Naopak nevýhodou je pracnost a časová náročnost.

Za upozornění taktéž stojí srovnání hodnot zjištěných analytickou a numerickou metodou na bázi Ho-Lee modelu a Hull-White modelu. I přes skutečnost, že analytická i numerická oceňovací metoda vychází ze stejných vstupních parametrů, vypočítané výsledky jsou různé. Tento rozdíl může být způsoben vyjádřením náhodného vývoje krátkodobé úrokové sazby. V případě analytické metody je ocenění vyjádřeno prostřednictvím spojitého času. Zatím co u numerické metody je ocenění opce provedeno v diskrétních časových okamžicích. Proto v závěru při vypočítání hodnot evropské call opce došlo ke skutečnosti, že získané ceny se liší.

Jak již bylo řečeno, v našem případě má největší vypovídací schopnost Cox-Ingersol-Rosův model, vzhledem k nejmenší směrodatné odchylce.

5. Závěr

Podle druhů rizik a kategorií tržního rizika se deriváty rozdělují na úrokové, měnové, akciové, komoditní a úvěrové deriváty. Toto rozdělení je podle podkladových nástrojů. V této práci byla problematika zaměřena na oceňování úrokových derivátů, což jsou takové finanční nástroje, jejichž cena závisí na velikosti úrokové míry.

Cílem diplomové práce bylo srovnat jednotlivé metody oceňování finančních derivátů na úrokové sazby a ověřit na dvou vybraných dluhopisech českého kapitálového trhu.

Druhá kapitola je zaměřena na charakteristiku dluhopisů, jejich dělení a výpočet současné hodnoty kupónového a bezkupónového dluhopisu. Následně je rozebrána charakteristika finančních derivátů, které dělíme na termínové obchody a obchody s kontrakty o budoucích obchodech s podkladovými aktivy. Následuje podrobný výklad finančních derivátů na úrokové sazby, tedy úrokové forwardy, úrokové swapy, úrokové futures a úrokové opce. Z důvodu, že jde o finanční instrumenty, jejichž cena závisí na hodnotě úrokové míry, byla problematika zaměřena i na výnosovou křivku, tedy vztah mezi spotovými a forwardovými sazbami, konstrukci forwardové a spotové výnosové křivky a teorii výnosových křivek.

V třetí kapitole jsou popsány jednotlivé metody, které slouží k oceňování finančních derivátů na úrokové sazby. Mezi tyto metody patří analytické modely úrokové sazby, tj. Vašíčkův model, CIR model, Ho-Lee model, Hull-White model, a numerické metody oceňování, tj. binomický model oceňování na bázi Ho-Lee modelu a trinomický model na bázi Hull-White modelu.

Ve čtvrté kapitole bylo provedeno ověření vybraných metod oceňování finančních derivátů na úrokové sazby. Ocenění bylo provedeno na dluhopisech českého kapitálového trhu, konkrétně na bezkupónovém dluhopisu ČM ST.SP. 0,00/20 a kupónovém st. dluhopisu 2,80/13. Cena evropské call opce byla určena pomocí analytických a numerických modelů. Z analytických modelů byl použit Vašíčkův model, CIR model, což jsou rovnovážné modely, dále Ho-Lee model a Hull-White model, což jsou bezarbitrážní modely. Rovnovážné modely berou v úvahu návrat k dlouhodobé rovnováze. Avšak nemusí odpovídat skutečným úrokovým sazbám. Bezarbitrážní modely jsou naopak navrženy tak, aby byly v souladu se vstupní výnosovou křivkou. Z numerických modelů byl použit binomický model na bázi Ho-Lee modelu a trinomický model na bázi Hull-White modelu. Tyto modely určují cenu úrokového derivátu přibližným způsobem. Výhodou je pružnost při oceňování velkého množství derivátů, naopak nevýhodou je velká pracnost. Závěry ke srovnání jednotlivých cen evropské call opce poskytuje podkapitola 4.9.

Vzhledem ke skutečnosti, že každý z modelů má různé specifické vlastnosti, došlo při stanovení ceny evropské call opce k tomu, že vypočítané hodnoty jsou pro jednotlivé modely různé. Za nejvhodnější oceňovací model pro daná data je v našem případě považován Cox-Ingersol-Rosův model, vzhledem ke skutečnosti, že má nejmenší směrodatnou odchylku.

Další možností vedoucí k rozšíření této problematiky může být oceňování evropských put opcí, případně oceňování amerických call a put opcí.

Seznam použité literatury

a) Knihy, příspěvky ve sborníku

[1] Ambrož, L., Oceňování opcí. 1. vydání, C.H.Beck, 2002. 313 s. ISBN 80-7179-531-3

[2] Bohanesová, E., Finanční matematika I., 1. vydání, PřF Univerzita Palackého v Olomouci, 2006. 117 s. ISBN 80-244-1294-2

[3] Dluhošová D. a kolektiv, Finanční řízení a rozhodování podniku. 3.vydání, Ekopress, s.r.o, 2010. 225 s. ISBN 978-80-86929-68-2

[4] Fabozzi, F.J. The Handbook of Fixed Incoma Securities. 6th ed. New York: Mc Graw-Hill, 2001. 1373 s. ISBN 0-07-135805-6

[5] Hull, J.C. Options, Futures and Other Derivatives. 6th ed. New Jersey: Prentice - Hall, 2006. 789 s. ISBN 0-13-149908-4

[6] Jílek, J., Finanční a komoditní deriváty v praxi. 2.vydání. Grada Publishing, Praha, 2010. 632 s. ISBN 978-80-247-3696-9

[7] Kolektiv autorů, Bankovnictví. 5. přepracované vydání. Bankovní institut, a.s., Praha, 2005. 280 s. ISBN 80-7265-080-7

[8] Málek, J., Dynamika úrokových měr a úrokové deriváty. 1.vydání, Ekopress, s.r.o., 2005. 135 s. ISBN 80-86119-97-1

[9] Neftci, S.N. An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives. Second edition. New York: Academic Press, 2000. 527 s. ISBN 0-12-515392-9

[10] Tichý, T. Finanční deriváty: Typologie finančních derivátů, podkladové procesy, oceňovací modely. VŠB – Technická univerzita Ostrava, 2006. 162 s.
ISBN 80-248 1180-4

[11] Zmeškal Z. a kolektiv, Finanční modely. 2. vydání, Ekopress, s.r.o, 2004. 236 s.
ISBN 80-86119-87-4

[12] Zmeškal, Z.; Čulík, M.; Tichý, T.; Finanční rozhodování za rizika, Sbírka řešených příkladů. 2. vydání, VŠB – Technická univerzita Ostrava, 2005. 149 s.
ISBN 80-248-0840-4

b) Internetové stránky

http://www.cnb.cz/cs/financni_trhy/penezni_trh/pribor/denni.jsp?date=DD.MM.RRRR

http://www.pse.cz/Cenne-Papiry/

http://trhy.mesec.cz

Seznam zkratek

a	parametr rychlosti přibližování k dlouhodobé rovnováze
a_t	parametr binomického modelu
A_{t-1}	současná hodnota kupónových plateb až po T-1
AUV	alikvótní úrokový výnos
b	dlouhodobě očekávaná úroková míra
b_t	parametr volatility v binomickém modelu
B_0	aktuální tržní cena obligace
BCPP	Burza cenných papírů Praha
c	cena evropské call opce
C	kupónová platba
CF_i	cash-flow v čase i
CRI	Cox–Ingersol–Rossův model
ČM ST.SP.	Českomoravská stavební spořitelna, a.s.
ČNB	Česká národní banka
dr	změna krátkodobé bezrizikové úrokové sazby v čase
dt	časový interval
f_t	forwardový výnos
F_T	forwardová cena obligace
F(0,t)	okamžitá forwardová sazba na období (0,t)
$F_t(0,t)$	první derivace F(0,t) podle t
$F_{t,s}$	cena evropské opce v čase t a stavu s
FRA	dohoda o forwardové úrokové míře
HLM	Ho-Lee model
I_0	současná hodnota kupónových plateb
K	realizační cena
K_i	hodnota bezkupónového dluhopisu v čase T s nominální hodnotou 1 Kč v čase s_i, při které se $r= r^*$,
L	jistina dluhopisu
LIBOR	úroková sazba
MNČ	metoda nejmenších čtverců
n	doba splatnosti v letech
N(d)	kumulativní pravděpodobnost pro normované normální rozdělení

NH	nominální hodnota
p	cena evropské put opce
p_u,	pravděpodobnosti nejvyšší větve vycházející z uzlu
p_m	pravděpodobnosti střední větve vycházející z uzlu
p_d	pravděpodobnosti nejnižší větve vycházející z uzlu
$P_{t,s}$	cena v čase t a stavu s u obligace s n lety splatnosti
P(t,T)	cena dluhopisu v čase t
$P_{00}(n)$	aktuální tržní ceny obligací
$P'_{00}(n)$	propočtené ceny obligací pomocí binomického, resp. trinomického modelu,
PRIBOR	úroková sazba
PV	současná hodnota
Δr	náhodný přírůstek úroků
$\Delta\tilde{r}$	odhadnutý trend modelu
r_t	spotový výnos do doby splatnosti
r^*	hodnota krátkodobé úrokové sazby, při které je cena kupónového dluhopisu rovna realizační ceně
$r_{t,s}$	krátkodobá bezriziková sazba úroková sazba v uzlu (t,s)
s	datum splatnosti obligace
Δt	délka časového kroku
T	datum splatnosti opce
TC	tržní cena
$VH_{t,s}$	vnitřní hodnota opce
y	vnitřní výnosové procento
z	náhodná veličina z normovaného normálního rozdělení
α	odhadovaný parametr regrese metodou nejmenších čtverců
β	odhadovaný parametr regrese metodou nejmenších čtverců
σ	směrodatná odchylka
$\theta(t)$	funkce času
ε	reziduální odchylka

Prohlášení o využití výsledků diplomové práce

Prohlašuji, že

- jsem byla seznámena s tím, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. – autorský zákon, zejména § 35 – užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, v rámci školních představení a užití díla školního a § 60 – školní dílo;
- beru na vědomí, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen VŠB-TUO) má právo nevýdělečně, ke své vnitřní potřebě, diplomovou práci užít (§ 35 odst. 3);
- souhlasím s tím, že diplomová práce bude v elektronické podobě archivována v Ústřední knihovně VŠB-TUO a jeden výtisk bude uložen u vedoucího diplomové práce. Souhlasím s tím, že bibliografické údaje o diplomové práci budou zveřejněny v informačním systému VŠB-TUO;
- bylo sjednáno, že s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- bylo sjednáno, že užít své dílo, diplomovou práci, nebo poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše).

V Ostravě dne 31.5.2011

………………………………

jméno a příjmení studenta

Adresa trvalého pobytu studenta:

Luká 40, Slavětín u Litovle, 783 24